



# Renormalisations dans l'espace réel de type Ma-Dasgupta pour divers systèmes désordonnés

Cécile Monthus

## ► To cite this version:

Cécile Monthus. Renormalisations dans l'espace réel de type Ma-Dasgupta pour divers systèmes désordonnés. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. <tel-00006271>

**HAL Id: tel-00006271**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006271>**

Submitted on 15 Jun 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Théorique

## Mémoire d'habilitation

présenté par

Cécile MONTHUS

*Méthodes de renormalisation dans l'espace réel*

*de type Ma-Dasgupta*

*pour divers systèmes désordonnés*

Soutenue le 1er Juin 2004 devant la commission d'examen composée de Messieurs

Président :	Bernard DERRIDA	ENS-Université Paris 6
Rapporteurs :	Jean-Philippe BOUCHAUD	SPEC Saclay
	Hendrik-Jan HILHORST	LPT-Université Paris-Sud
	Jorge KURCHAN	CNRS-ESPCI Paris
Examineurs :	Alan BRAY	Université de Manchester
	Jean-Marc LUCK	SPhT Saclay

*“Pour les esprits qui savent comprendre, à côté de la beauté d’une loi générale,  
les finesses d’une analyse subtile et délicate frôlant parfois le paradoxe,  
la théorie des hasards présentera un attrait et un charme tout particuliers.”*

Louis Bachelier

# Avant-Propos

Ce mémoire d’habilitation décrit l’application de procédures de renormalisation de type Ma-Dasgupta à plusieurs types de systèmes désordonnés, classiques ou quantiques, dynamiques ou statiques. Afin de replacer dans une perspective commune ces différentes études, les premiers chapitres sont consacrés à une présentation générale de la méthode.

## Les chapitres généraux sur la méthode

- L’introduction situe les renormalisations de type Ma-Dasgupta par rapport aux nombreuses approches qui existent pour les systèmes désordonnés.

Étant donné qu’une renormalisation de type Ma-Dasgupta est à la fois une “façon de penser” et une “façon de calculer”, ces deux aspects sont discutés séparément, pour plus de clarté :

- Le Chapitre 1 explique en détails les idées physiques essentielles communes aux approches de type Ma-Dasgupta dans les différents contextes.

- Le Chapitre 2 présente les règles quantitatives de renormalisation, qui donnent lieu à de jolis problèmes de probabilités.

## Les chapitres sur des systèmes désordonnés classiques

La majorité du mémoire est consacrée à divers modèles de physique statistique classique, où les approches de type Ma-Dasgupta sont utilisées soit pour caractériser des propriétés de dynamique lente, de vieillissement ou de croissance de domaines, soit pour étudier les propriétés à l’équilibre thermodynamique de certains modèles désordonnés. Nous discuterons en particulier les modèles suivants :

- la dynamique d’une particule dans un milieu aléatoire unidimensionnel, que ce soit dans un paysage de forces aléatoires (Chapitres 3 et 4), ou dans un paysage de pièges aléatoires (Chapitres 8 et 9).

- l’équilibre et la dynamique hors équilibre de croissance de domaines de chaînes de spins désordonnées classiques (Chapitre 5), comme la chaîne d’Ising en champ aléatoire ou la chaîne verre de spin en champ magnétique extérieur.

- la transition de délocalisation d’un polymère aléatoire, composé de monomères hydrophobes et hydrophiles, à une interface entre deux solvants sélectifs (Chapitre 6).

## Les chapitres sur des systèmes désordonnés quantiques

Après ces modèles de physique statistique classique, nous reviendrons dans les deux derniers chapitres aux **chaînes de spins quantiques désordonnées**, c'est à dire le domaine initial de la méthode :

- Le Chapitre 10 concerne la chaîne de spin  $S = 1$  antiferromagnétique aléatoire, qui présente une transition de phases en fonction du désordre, contrairement à la chaîne  $S = 1/2$ .
- Le Chapitre 11 est consacré aux propriétés de taille finie de la transition de phase quantique de la chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires.
- Enfin, un petit aperçu des différentes études de type Ma-Dasgupta qui existent dans la littérature, est donné en Annexe.

## Publications associées

Ce mémoire est basé sur les publications notées [P1] ... [P15], publiées entre 1997 et 2004, dont la liste se trouve à la fin, en page 117. Par rapport au mémoire, ces publications contiennent des discussions plus approfondies des modèles, des résultats complémentaires, les dérivations de tous les résultats, et des listes de références appropriées. Par comparaison, le but de ce mémoire est de donner une idée générale de la méthode, des modèles qu'elle permet d'étudier, et des résultats qu'elle permet d'obtenir, sans entrer dans une description trop détaillée de chaque modèle discuté.

## Remerciements

Je souhaite bien sûr remercier chaleureusement mes différents collaborateurs sur les travaux de recherche présentés dans ce mémoire.

Tout a commencé 'par hasard' en 1996, lors d'une rencontre dans la salle de café du SPHT, lorsque Thierry Jolicoeur m'a parlé de la méthode de Ma-Dasgupta pour les chaînes de spins quantiques aléatoires. Alors que je ne connaissais presque rien sur les chaînes de spins quantiques, j'ai tout de suite eu un coup de coeur pour cette méthode qui proposait de renormaliser des distributions de probabilité de manière si simple et si jolie ! En collaboration avec Olivier Golinelli et Thierry Jolicoeur, nous avons alors entrepris de généraliser la méthode de Ma-Dasgupta à la chaîne de spin  $S = 1$  aléatoire (Chapitre 10). Le jour où nous avons compris que la transition de phase quantique en fonction de la largeur du désordre correspondait à une transition de percolation pour les amas "VBS" est l'un de mes meilleurs souvenirs de recherche. Je remercie donc vivement Olivier Golinelli et Thierry Jolicoeur pour ce premier travail de type Ma-Dasgupta qui m'a beaucoup appris.

Je suis tout particulièrement reconnaissante à Pierre Le Doussal, qui m'a proposé en 1997 de travailler en collaboration avec Daniel Fisher, sur l'application de la méthode de Ma-Dasgupta à la diffusion unidimensionnelle en milieu aléatoire. Comme je connaissais déjà la méthode par les chaînes de spins, et le modèle de Sinai pour y avoir travaillé

par d'autres approches durant ma thèse, c'était évidemment un sujet idéal pour moi... C'était aussi un magnifique cadeau, car il y avait beaucoup de probabilités à calculer ! Je remercie donc vivement Daniel Fisher et Pierre Le Doussal pour cette collaboration sur la marche aléatoire dans un potentiel Brownien (Chapitre 3) et sur la dynamique hors équilibre de chaînes de spins désordonnées classiques (Chapitre 5). Ces travaux ont eu ensuite plusieurs développements en collaboration avec Pierre Le Doussal, notamment sur les propriétés de la localisation de Golosov (Chapitre 3), sur la renormalisation de potentiels unidimensionnels plus généraux (Chapitre 7), et sur d'autres sujets, qui attendent encore d'être terminés...

Je voudrais ensuite remercier ceux qui m'ont intéressée à des modèles discutés dans ce mémoire. Ainsi, l'étude de la localisation du polymère aléatoire à une interface (Chapitre 6) est issue de discussions avec Thomas Garel et Henri Orland, alors que l'étude des propriétés de vieillissement et de réponse du modèle de pièges (Chapitres 8 et 9) a été suscitée par des questions posées par Jean-Philippe Bouchaud et Éric Bertin.

Enfin, je remercie tous les membres du jury pour avoir accepté d'en faire partie et de consacrer un peu de temps à la lecture de ce mémoire.



# Table des matières

<b>Avant-Propos</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Des arguments probabilistes sur les fluctuations spatiales du désordre ...	2
... aux procédures de renormalisation sur le désordre ...	3
<b>1 La signification physique des approches de type Ma-Dasgupta</b>	<b>7</b>
1.1 L'idée essentielle : le désordre qui domine par rapport aux fluctuations thermiques ou quantiques ...	7
1.1.1 Signification dans les différents contextes physiques ...	7
1.1.2 Comment savoir si le désordre domine à grande échelle ? ...	9
1.2 La manière de raisonner ...	10
1.2.1 Modèles dynamiques : l'exemple du modèle de Sinai ...	11
1.2.2 Modèles à l'équilibre : de l'argument Imry-Ma à la renormalisation Ma-Dasgupta ! ...	13
1.3 Conclusion ...	13
<b>2 Les règles de renormalisation de type Ma-Dasgupta</b>	<b>15</b>
2.1 Qu'est-ce qu'une règle de renormalisation de type Ma-Dasgupta ? ...	15
2.2 La classe d'universalité des extrema Browniens ...	16
2.2.1 Les deux exemples quantiques fondamentaux ...	16
2.2.2 Extrema des marches aléatoires à grande échelle ...	17
2.2.3 Distribution des extrema du potentiel Brownien pur ...	18
2.2.4 Distribution des extrema du potentiel Brownien biaisé ...	19
2.3 Renormalisation d'un potentiel aléatoire unidimensionnel quelconque ...	20
2.4 Règles de décimation plus générales ...	21
2.5 Variables auxiliaires et exposants critiques ...	21
2.6 Comparaison avec certains modèles de croissance ...	22
2.7 Conclusion ...	23
<b>3 Marche aléatoire dans un potentiel Brownien</b>	<b>25</b>
3.1 Présentation du modèle ...	25
3.1.1 Version continue : Diffusion dans un potentiel Brownien ...	25
3.1.2 Version discrète : Marche aléatoire sur réseau 1D ...	26



3.2	Principe de l'approche de renormalisation . . . . .	26
3.3	Étude de la dynamique effective . . . . .	27
3.3.1	Front de diffusion . . . . .	27
3.3.2	Distribution de l' énergie . . . . .	28
3.3.3	Propriétés de vieillissement . . . . .	29
3.3.4	Statistique des retours à l'origine de $m(t)$ . . . . .	30
3.4	Étude des propriétés de localisation . . . . .	31
3.4.1	Distribution asymptotique du paquet thermique . . . . .	31
3.4.2	Paramètres de localisation . . . . .	31
3.4.3	Comparaison avec les fonctions d'équilibre . . . . .	31
3.4.4	Largeur thermique et événements rares . . . . .	32
3.5	Relation avec la théorie générale des dynamiques lentes et des états métastables . . . . .	33
3.5.1	États métastables . . . . .	33
3.5.2	Observables à un temps et Conjecture d'Edwards . . . . .	33
3.5.3	Décomposition du front de diffusion sur les états métastables . . . . .	33
3.6	Étude des fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck . . . . .	34
3.6.1	Construction des fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck associé à la dynamique effective . . . . .	34
3.6.2	Structure spatiale des fonctions propres : 2 pics et 3 échelles de longueur ! . . . . .	35
3.7	Conclusion . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Marche aléatoire dans un potentiel Brownien biaisé</b>	<b>37</b>
4.1	Présentation du modèle . . . . .	37
4.1.1	La phase de diffusion anormale . . . . .	37
4.1.2	Le modèle dirigé de pièges . . . . .	37
4.2	Principe de la renormalisation . . . . .	38
4.3	Résultats pour le modèle dirigé de pièges . . . . .	39
4.4	Équivalence quantitative entre le modèle de Sinai biaisé et le modèle dirigé de pièges . . . . .	40
4.5	Résultats pour le modèle de Sinai biaisé . . . . .	41
4.6	Conclusion . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Chaînes de spin classiques désordonnées</b>	<b>43</b>
5.1	Présentation des modèles . . . . .	43
5.1.1	La chaîne d'Ising en champ aléatoire . . . . .	43
5.1.2	La chaîne verre de spin en champ magnétique extérieur . . . . .	44
5.2	Principe de la renormalisation . . . . .	44
5.2.1	Hamiltonien pour les parois de domaines . . . . .	44
5.2.2	Dynamique de croissances de domaines . . . . .	45
5.2.3	Équilibre . . . . .	45
5.3	Résultats . . . . .	46
5.3.1	Densité de parois . . . . .	46

5.3.2	Distribution des longueurs des domaines . . . . .	46
5.3.3	Fonction de corrélation spatiale . . . . .	46
5.3.4	Fonction de corrélation temporelle . . . . .	46
5.3.5	Exposants de persistance . . . . .	46
5.3.6	Violation du théorème de fluctuation-dissipation . . . . .	47
5.4	Conclusion . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Localisation d'un polymère aléatoire à une interface</b>	<b>49</b>
6.1	Présentation du modèle . . . . .	49
6.1.1	Argument de type Imry-Ma pour le cas symétrique . . . . .	49
6.1.2	Argument de type Imry-Ma pour le cas dissymétrique . . . . .	50
6.2	Principe de la renormalisation . . . . .	51
6.2.1	Construction de la structure optimale en boucles . . . . .	51
6.2.2	Validité de la méthode . . . . .	53
6.3	Résultats pour le cas symétrique . . . . .	53
6.3.1	Énergie libre . . . . .	53
6.3.2	Distribution des longueurs de boucles . . . . .	53
6.3.3	Densité de polymère autour de l'interface . . . . .	53
6.3.4	Température de délocalisation d'une chaîne finie . . . . .	54
6.4	Résultats pour le cas dissymétrique . . . . .	54
6.4.1	Température critique . . . . .	54
6.4.2	Singularité essentielle de l' énergie libre . . . . .	54
6.4.3	Propriétés des boucles dans les deux solvants . . . . .	54
6.4.4	Densité de polymère autour de l'interface . . . . .	55
6.4.5	Température de délocalisation d'une chaîne finie . . . . .	55
6.5	Conclusion . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Potentiel Brownien en présence d'un confinement quadratique</b>	<b>57</b>
7.1	Présentation du modèle . . . . .	57
7.1.1	Argument de Imry-Ma . . . . .	57
7.1.2	Symétrie statistique de 'tilt' . . . . .	58
7.2	Principe de la renormalisation . . . . .	58
7.3	Résultats sur la statistique des minima . . . . .	59
7.3.1	Position du minimum . . . . .	59
7.3.2	Échantillons avec deux minima presque dégénérés . . . . .	59
7.3.3	Contribution au second cumulant à basse température . . . . .	59
7.3.4	Contribution aux moments thermiques à basse température . . . . .	60
7.4	Résultats sur la statistique de la plus grande barrière . . . . .	60
7.5	Conclusion . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Le modèle de pièges unidimensionnel</b>	<b>63</b>
8.1	Présentation des modèles de pièges . . . . .	63
8.2	Principe de la renormalisation . . . . .	64
8.3	Résultats . . . . .	65

8.3.1	Distance entre pièges dans le paysage renormalisé . . . . .	65
8.3.2	Forme d'échelle du front de diffusion . . . . .	66
8.3.3	Paramètres de localisation . . . . .	66
8.3.4	Fonction génératrice des cumulants thermiques . . . . .	66
8.3.5	Fonction de corrélation à deux particules . . . . .	66
8.3.6	Les deux fonctions de corrélations temporelles . . . . .	67
8.4	Analyse de scaling pour le modèle de pièges en $d = 2$ . . . . .	67
8.4.1	Paysage renormalisé . . . . .	67
8.4.2	Deux échelles de temps . . . . .	68
8.4.3	Deux échelles de longueur . . . . .	68
8.5	Conclusion . . . . .	69
<b>9</b>	<b>Le modèle de pièges en champ : réponses linéaire et non-linéaire</b>	<b>71</b>
9.1	Présentation du modèle . . . . .	71
9.2	Une symétrie dynamique qui empêche la violation du théorème Fluctuation-Dissipation . . . . .	71
9.2.1	Loi de conservation dans chaque échantillon pour le modèle sans champ . . . . .	72
9.2.2	Un théorème de fluctuation non-linéaire pour $t_w = 0$ . . . . .	72
9.2.3	Un théorème de fluctuation non-linéaire pour $t_w$ quelconque . . . . .	73
9.2.4	Discussion . . . . .	74
9.3	Étude de la réponse par renormalisation . . . . .	74
9.3.1	Résultats explicites pour $t_w = 0$ . . . . .	74
9.3.2	Résultats explicites pour $t_w > 0$ . . . . .	75
9.4	Conclusion . . . . .	77
<b>10</b>	<b>Chaîne de spin quantique <math>S = 1</math> antiferromagnétique aléatoire</b>	<b>79</b>
10.1	La chaîne antiferromagnétique $S = 1$ sans désordre . . . . .	79
10.1.1	Différences entre spin demi-entier et spin entier . . . . .	79
10.1.2	La fonction d'onde VBS . . . . .	79
10.1.3	Le paramètre d'ordre topologique . . . . .	80
10.2	Construction des règles de renormalisation . . . . .	80
10.2.1	Renormalisation d'un lien antiferromagnétique . . . . .	80
10.2.2	Procédure de renormalisation avec 4 types de liens . . . . .	81
10.2.3	Interprétation de la renormalisation en termes d'amas VBS . . . . .	81
10.3	Étude numérique de la renormalisation . . . . .	82
10.3.1	Résultats dans la phase de fort désordre . . . . .	83
10.3.2	Résultats dans la phase de faible désordre . . . . .	83
10.3.3	Résultats numériques au point critique . . . . .	85
10.3.4	Étude des types de liens . . . . .	85
10.3.5	Étude numérique de la transition de percolation des amas VBS . . . . .	85
10.4	Calcul des exposants critiques exacts . . . . .	87
10.5	Conclusion . . . . .	88

<b>11 Chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires</b>	<b>89</b>
11.1 Présentation du modèle . . . . .	89
11.1.1 Transition de phase quantique . . . . .	89
11.1.2 Ensembles microcanonique et canonique pour un système désordonné fini . . . . .	89
11.1.3 Théorie du 'finite-size scaling' pour les systèmes désordonnés ? .	90
11.1.4 Observables intéressantes en taille finie . . . . .	91
11.2 Résultats sur l'aimantation de surface . . . . .	91
11.2.1 Aimantation de surface et variable de Kesten . . . . .	91
11.2.2 Distributions asymptotiques de l'aimantation de surface . . . .	92
11.2.3 Lois d'échelle dans les deux ensembles . . . . .	92
11.2.4 Moyenne de l'aimantation de surface . . . . .	93
11.2.5 Résultats exacts par un calcul d'intégrale de chemin . . . . .	93
11.3 Gap et corrélation entre spins de bord dans les deux ensembles . . . .	95
11.3.1 Détermination du gap et de la corrélation par renormalisation .	95
11.3.2 Résultats au point critique . . . . .	95
11.3.3 Comportements dans la région critique . . . . .	96
11.4 Conclusion . . . . .	96
<b>Conclusion</b>	<b>99</b>
L'intérêt des approches de type Ma-Dasgupta . . . . .	99
Probabilités et renormalisation . . . . .	100
<b>Annexe : Autres modèles étudiés dans la littérature</b>	<b>101</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>103</b>
<b>Liste des Publications associées</b>	<b>117</b>



# Introduction

*Où l'on situe les renormalisations de type Ma-Dasgupta parmi les approches qui cherchent à décrire les fluctuations spatiales dans les systèmes désordonnés.*

La présence de désordre dans un système peut donner naissance à des phénomènes physiques tout à fait nouveaux, comme la localisation d'Anderson en matière condensée, ou les propriétés de dynamique lente en physique statistique. L'étude des systèmes désordonnés a donc engendré un certain nombre d'approches spécifiques depuis une cinquantaine d'années : le premier exemple est la méthode de mesure invariante de Dyson [68] et Schmidt [153] qui permet d'obtenir des résultats exacts pour les systèmes unidimensionnels décrits par des produits infinis de matrices de transfert aléatoires [123, 46]. Pour comprendre l'intérêt et la spécificité des procédures de renormalisation de type Ma-Dasgupta qui constituent le sujet de ce mémoire, on peut classer les différentes façons d'aborder les systèmes désordonnés en deux grandes catégories :

- il y a d'une part **des approches qui commencent par moyenner sur le désordre**, car elles se fixent pour objectif d'évaluer des observables automoyennantes, comme par exemple l'énergie libre s'il s'agit d'étudier la thermodynamique du système. Il existe un certain nombre de prescriptions spécifiques pour effectuer cette moyenne sur le désordre : la méthode des répliques [133], la méthode supersymétrique [69], la méthode dynamique [25] (pour une présentation parallèle des trois méthodes : [117]). Après cette moyenne sur le désordre, il n'y a plus d'hétérogénéités spatiales, mais il y a en échange un système pur avec de nouvelles interactions effectives.

- il y a d'autre part **des approches qui cherchent à décrire les hétérogénéités spatiales du désordre**, comme certains arguments célèbres et diverses procédures de renormalisation dans l'espace réel, que nous allons discuter un peu plus en détails, car ces approches appartiennent à la même 'famille de pensée' que les procédures de type Ma-Dasgupta.

## Des arguments probabilistes sur les fluctuations spatiales du désordre ...

Parmi les arguments qui ont joué un grand rôle dans la compréhension des systèmes désordonnés, on peut citer

(a) **l'argument de Lifshitz** [119, 120], qui permet de prédire les singularités essentielles des densités d'états en bord de spectre, en identifiant les configurations du désordre qui engendrent des états dans cette zone d'énergie, et en estimant les probabilités de présence de ces configurations favorables.

(b) **les phases de Griffiths**, dans lesquelles des régions rares localement ordonnées induisent des singularités essentielles pour l'équilibre [87] et des lois de décroissance lente pour la dynamique [148, 30].

(c) **le critère de Harris** [89] sur la pertinence d'un faible désordre autour du point critique pur, qui estime l'influence des fluctuations locales du désordre sur les fluctuations de températures critiques.

(d) **l'argument de Imry-Ma** [107], qui permet de prédire l'apparition de parois de domaines dans les systèmes en champs aléatoires, en considérant les fluctuations spatiales d'énergie venant des champs aléatoires.

(e) **le théorème de Chayes et al.** [41], qui montre que les fluctuations spatiales du désordre impliquent l'inégalité  $\nu \geq 2/d$  pour l'exposant critique  $\nu$  dans un système désordonné en dimension  $d$ .

En fait, ces différents arguments ne font intervenir que deux propriétés statistiques différentes. D'une part, les arguments (a) et (b), qui sont très proches [142, 123], reposent tous les deux la prise en compte d'événements rares : dans toute configuration infinie de désordre, il existe des domaines ordonnés arbitrairement grands avec des probabilités exponentiellement petites. D'autre part, les arguments (c), (d) et (e) reposent tous les trois sur le comportement typique en  $\sqrt{N}$  de la somme d'un grand nombre  $N$  de variables aléatoires indépendantes.

Ces arguments de type probabiliste sont bien fondés et presque "inattaquables". A ma connaissance, le seul argument qui a donné lieu à une controverse [108] est l'argument de Imry-Ma qui était en désaccord avec la "réduction dimensionnelle" prédite par les approches de théorie des champs, que ce soit en perturbation à tous les ordres [2, 164] ou dans le formalisme supersymétrique [146]. Les études rigoureuses [106, 33] ont finalement donné raison à ... l'argument de Imry-Ma ! Cet exemple montre que les arguments dits "heuristiques" même s'ils sont simples, peuvent avoir un contenu physique non-trivial, qu'il n'est pas toujours facile de retrouver par des méthodes plus "sophistiquées".

En conclusion, ces arguments de type probabilistes permettent de bien comprendre la physique, car ils identifient les fluctuations locales du désordre qui sont responsables de tel ou tel phénomène. En contrepartie, il est souvent difficile de dépasser l'aspect qualitatif et de 'calculer' vraiment... Pour aller au delà en restant dans le même esprit, l'idée la plus naturelle est bien sûr d'utiliser des procédures de renormalisation dans l'espace réel.

## ... aux procédures de renormalisation sur le désordre

Le choix de travailler dans l'espace réel pour définir une procédure de renormalisation, qui a déjà un grand intérêt pour les systèmes purs [141, 34], devient l'unique choix possible en présence de désordre si l'on souhaite décrire les hétérogénéités spatiales.

### Renormalisations par blocs

Les renormalisations par blocs, de type décimation ou de type Migdal-Kadanoff sont les renormalisations les plus utilisées pour les systèmes désordonnés. Les procédures de type Migdal-Kadanoff [135, 111] constituent en effet des approximations simples pour effectuer des renormalisations par blocs sur les réseaux réguliers. Elles représentent aussi des renormalisations exactes sur certains réseaux hiérarchiques [112]. Parmi les systèmes étudiés, on peut citer par exemple le modèle de Potts [116], les ferromagnétiques dilués [109], et surtout les verres de spin, qui ont donné lieu à un grand nombre de travaux : ces études concernent les diagrammes de phases [169, 27, 26], diverses propriétés de la phase verre de spin [162, 137, 152], et surtout le caractère chaotique des trajectoires du flot de renormalisation [131, 9, 144, 162] qui est une grande nouveauté par rapport aux systèmes purs.

Par ailleurs, divers systèmes désordonnés ont été étudiés par des procédures de renormalisation sur réseaux hiérarchiques, en particulier le modèle de Potts [59], les polymères dirigés en milieu aléatoire [60, 44, 53], et les problèmes de mouillage aléatoire [62, 161].

Citons enfin les procédures de renormalisation par blocs pour la diffusion dans les modèles de pièges [124] et pour les chaînes de spins quantiques aléatoires [92], car nous discuterons dans ce mémoire l'application des procédures de type Ma-Dasgupta à ces mêmes modèles.

### Renormalisation fonctionnelle pour les interfaces en milieux aléatoires

Pour les modèles d'interfaces en milieux aléatoires, il existe une méthode de renormalisation fonctionnelle [73] : c'est une méthode de théorie des champs qui étudie le flot de la fonction de corrélation du désordre. Nous renvoyons à la revue [167] pour la description des divers développements récents, et aux références [7, 118] pour des comparaisons avec les méthodes de répliques.

### Renormalisation pour les modèles XY désordonnés en 2D

L'introduction de désordre dans les modèles bidimensionnels de type XY, dans lesquels il existe des transitions de type Kosterlitz-Thouless dans le cas pur, a conduit à une renormalisation de type gaz coulombiens, dans laquelle on étudie le flot d'une distribution de probabilité des fugacités [37] afin de prendre en compte l'effet des hétérogénéités spatiales sur les défauts topologiques. Cette approche permet aussi d'étudier la transition vitreuse d'une particule dans un potentiel aléatoire présentant des corrélations logarithmiques [38].



## Renormalisations phénoménologiques pour les verres de spin

La “théorie des droplets” [74] pour les verres de spin en dimension finie, a pour origine une renormalisation phénoménologique introduite par Mc Millan [129] et développée par Bray et Moore [28]. Dans la formulation de Bray et Moore [28], l’idée essentielle est que la distribution de probabilité  $P_L(J)$  des couplages effectifs  $J$  à l’échelle  $L$  converge vers une forme fixe, avec une largeur  $J(L) = JL^y$  qui dépend de l’échelle  $L$ . L’exposant  $y$  et la distribution limite, qui sont calculables exactement en  $d = 1$ , ont été étudiés numériquement en  $d = 2$  ( $y < 0$ ) et  $d = 3$  ( $y > 0$  couplage fort) [28]. Cette idée d’un point fixe de couplage fort (ou de température nulle), décrit par une forme d’échelle pour la distribution de probabilité d’une variable aléatoire, correspond en fait exactement à la description que l’on obtient par les procédures de renormalisation de type Ma-Dasgupta lorsqu’on peut les utiliser.

## Renormalisation de Ma-Dasgupta pour les chaînes de spins quantiques

La procédure de renormalisation introduite par Ma-Dasgupta-Hu en 1979 [125] pour étudier la chaîne de spin quantique  $S = 1/2$  avec interactions antiferromagnétiques aléatoires a pour caractéristique essentielle de renormaliser de manière inhomogène dans l’espace pour mieux s’adapter aux réalisations locales du désordre. En effet, les méthodes usuelles de renormalisation traitent l’espace de manière homogène, en remplaçant par exemple chaque bloc de spins de taille donnée par un super-spin. Si ce caractère homogène est naturel pour les systèmes purs, on peut cependant se poser la question de sa légitimité pour les systèmes désordonnés qui brisent l’invariance par translation du système. Ma, Dasgupta et Hu ont défini une procédure de renormalisation sur l’énergie, et non sur la taille d’une cellule spatiale. La procédure consiste à décimer de manière itérative les degrés de liberté de plus haute énergie, afin d’obtenir une théorie effective de basse énergie pour la chaîne de spin, qui porte aujourd’hui le nom de “random singlet phase”.

Cette procédure de renormalisation est en fait restée peu connue et peu utilisée pendant de nombreuses années ... jusqu’aux travaux de Daniel Fisher en 1994-1995 [75, 76] qui lui ont donné à la fois :

### (i) un statut théorique bien défini : les points fixes de “désordre infini”

Alors que la méthode apparaissait jusque là comme une procédure approximative peu contrôlée, Daniel Fisher a montré que le flot de renormalisation prenait une forme d’échelle qui convergerait vers un point fixe de “désordre infini” (ce qui signifie que le désordre est de plus en plus fort à grande échelle), ce qui rendait la méthode asymptotiquement exacte [75, 76]. Par ailleurs, l’application de la méthode à la chaîne de spin avec couplages et champs transverses aléatoires (“Random Transverse Field Ising Chain” en anglais) lui a permis de montrer explicitement l’exactitude des résultats obtenus grâce à une comparaison directe avec certaines observables calculées rigoureusement pour le modèle de McCoy et Wu [130, 157]. (Ce modèle désordonné de McCoy et Wu est un modèle d’Ising classique bidimensionnel avec un désordre constant par colonne, qui est équivalent à la chaîne RTFIC.)

**(ii) des possibilités de calculs explicites assez remarquables**

Pour la chaîne RTFIC [75], la procédure de Ma-Dasgupta permet d'obtenir beaucoup de résultats nouveaux par rapport aux méthodes rigoureuses [130, 157, 143], en particulier l'exposant critique exact  $\beta = (3 - \sqrt{5})/2$  pour l'aimantation spontanée. Plus surprenant, Daniel Fisher a même calculé des observables que l'on ne connaît pas pour le modèle pur correspondant, c'est à dire pour le modèle d'Ising pur bidimensionnel ! (par exemple la fonction d'échelle explicite décrivant l'aimantation en fonction du champ appliqué dans la région critique) .

Ces travaux de Daniel Fisher ont engendré un grand intérêt pour ces méthodes dans le domaine des spins quantiques (cf les Chapitres 10 et 11, ainsi que l'Annexe). Dans ce mémoire, nous allons voir que les procédures de renormalisation de type Ma-Dasgupta ne se limitent pas aux systèmes de spins quantiques, mais sont aussi un outil idéal pour étudier une classe beaucoup plus large de systèmes désordonnés dans le domaine de la physique statistique.



# Chapitre 1

## La signification physique des approches de type Ma-Dasgupta

*Où l'on explique la notion de “point fixe de fort désordre”  
et la manière de raisonner dans une approche de type Ma-Dasgupta*

Dans ce premier chapitre à caractère pédagogique, nous présentons en détails les idées physiques essentielles communes aux diverses procédures de renormalisation utilisées dans divers contextes physiques.

### 1.1 L'idée essentielle : le désordre qui domine par rapport aux fluctuations thermiques ou quantiques

Dans tous les modèles considérés dans ce mémoire, les différentes procédures de renormalisation reposent sur la même idée : à grande échelle, le désordre domine par rapport aux fluctuations thermiques ou quantiques. En particulier, les procédures de renormalisation de type Ma-Dasgupta sont vraiment spécifiques aux systèmes désordonnés et ne peuvent même pas être définies pour les systèmes purs qui ne présentent pas d'hétérogénéités spatiales.

#### 1.1.1 Signification dans les différents contextes physiques

D'une certaine manière, les systèmes purs, qui sont gouvernés par les fluctuations d'origine thermique ou quantique, sont caractérisés par une grande “dégénérescence”, dans la mesure où tous les sites sont équivalents, alors que la présence de désordre lève complètement cette dégénérescence. Voici quelques exemples de cette idée dans les différents domaines.

#### 1.1.1.1 Exemple pour l'état fondamental d'un système quantique

Dans une chaîne quantique antiferromagnétique pure de spin  $S = 1/2$ , on peut voir qualitativement l'état fondamental comme une combinaison linéaire appropriée des états qui correspondent à toutes les façons possibles d'apparier les spins par deux pour former des singulets. En revanche, en présence de désordre, la procédure de renormalisation de Ma-Dasgupta associe à chaque réalisation du désordre un état fondamental qui correspond à une seule façon d'apparier les spins en singulets. Ainsi, dans un échantillon désordonné fixé, un spin donné est complètement corrélé à un seul autre spin de la chaîne, qui peut éventuellement être à une distance assez grande, mais n'est pratiquement pas corrélé avec les autres spins, même ses voisins immédiats sur la chaîne.

#### 1.1.1.2 Exemple pour l'équilibre d'une chaîne de spins classiques

Dans la chaîne d'Ising ferromagnétique pure, une paroi de domaine peut se trouver de manière équiprobable sur tous les liens car ils sont tous équivalents. L'argument classique énergie/entropie entre l'énergie  $2J$  que coûte une paroi de domaine et l'entropie  $S \sim k \ln L$  associé à la position arbitraire de la paroi dans un système fini de  $L$  sites, permet de comprendre l'absence d'ordre à longue portée à température finie et le comportement en  $L_T \sim e^{2J/T}$  de la taille typique d'un domaine.

En revanche, la présence d'un champ aléatoire va lever cette équivalence entre tous les sites. L'argument d'Imry-Ma [107], qui remplace l'argument énergie/entropie précédent, est un argument énergie/énergie : la comparaison entre l'énergie  $2J$  que coûte une paroi de domaine, et l'énergie typique  $\sqrt{\sigma L}$  gagnée en profitant d'une fluctuation favorable de la somme  $\sum_{i=1}^L h_i$  des champs aléatoires sur un domaine de taille  $L$ , conduit à une absence d'ordre à longue portée, même à température nulle, et à une longueur typique  $L_{IM} \sim J^2/\sigma$  pour les domaines. Nous verrons que la procédure de renormalisation de type Imry-Ma permet de déterminer les positions des parois des domaines d'Imry-Ma qui existent dans un échantillon donné.

#### 1.1.1.3 Exemples pour les marches aléatoires en milieux aléatoires

Pour une marche aléatoire pure, la probabilité de présence se répartit de manière gaussienne autour de l'origine, et il y a un étalement progressif au cours du temps.

En revanche, pour une marche aléatoire dans un potentiel Brownien, il y a des régions particulières à chaque échantillon qui localisent presque toute la probabilité de présence, et nous verrons comment les caractériser par une procédure de type Ma-Dasgupta. En particulier, les fluctuations thermiques sont tout à fait sous-dominantes : la distance entre deux particules indépendantes (c'est à dire deux histoires thermiques) qui diffusent dans le même échantillon, reste une variable aléatoire finie dans la limite de temps infini, ce qui constitue la localisation de Golosov [85].

De même, dans les modèles unidimensionnels de pièges caractérisés par une distribution large des temps de piégeage  $p(\tau) \sim 1/\tau^{1+\mu}$  avec  $0 < \mu < 1$ , le front de diffusion dans un échantillon donné est essentiellement localisé sur un nombre fini de pièges. À

nouveau, nous verrons comment étudier leurs propriétés statistiques par une approche de type Ma-Dasgupta généralisée. Au contraire, dans la phase  $\mu > 1$  où le temps moyen de piégeage est fini, il n'y a plus de localisation à temps infini, et une approche de type Ma-Dasgupta n'a plus de sens.

#### 1.1.1.4 Conclusion : les points fixes de fort désordre

Si l'on s'intéresse à la physique d'un système désordonné à grande échelle, il y a a priori trois possibilités pour l'évolution du désordre effectif par rapport aux fluctuations thermiques. En effet, lorsque l'échelle augmente, ce désordre effectif peut devenir

- (i) de plus en plus petit : le système est gouverné par un point fixe pur.
- (ii) de plus en plus grand : le système est gouverné par un point fixe de désordre infini.
- (iii) ou bien rester asymptotiquement à un niveau stable : le système est gouverné par un point fixe de désordre fini.

Dans certains modèles, un désordre initial même faible conduit à un point fixe de désordre infini (ii) : c'est en particulier le cas pour la chaîne quantique antiferromagnétique aléatoire  $S = 1/2$ , pour le modèle de Sinai, pour la chaîne d'Ising en champs aléatoires...

Lorsqu'il existe un point fixe de désordre fini (iii), il est quantifié par un nombre qui varie continûment, comme le paramètre  $\mu$  du modèle de pièges. Le point fixe peut souvent être qualifié de fort désordre dans une certaine région de paramètres. Ainsi, dans le modèle de pièges ou dans le modèle de Sinai en présence d'un champ extérieur, la dynamique est gouvernée par un point fixe de fort désordre dans la phase  $\mu < 1$  qui présente une localisation partielle du paquet thermique : il y a une probabilité finie que deux trajectoires thermiques dans le même échantillon soient à une distance finie à temps infini.

En conclusion, les méthodes de renormalisation de type Ma-Dasgupta concernent :

- les points fixes de désordre infini (ii).
- les points fixes de désordre fini (iii) qui peuvent être qualifiés de désordre fort.

### 1.1.2 Comment savoir si le désordre domine à grande échelle ?

#### 1.1.2.1 Par des arguments théoriques a priori ?

L'importance relative qu'ont les fluctuations thermiques par rapport au désordre à grande échelle ne se voit pas directement sur le modèle microscopique et n'est souvent pas très bien connue pour la plupart des systèmes désordonnés. Même pour les systèmes en champ aléatoire pour lesquels il existe un argument d'Imry-Ma énergie/ énergie discuté ci-dessus, il n'existe pas, à ma connaissance, d'argument généralisé qui inclurait dans la discussion les fluctuations thermiques des parois de domaines et qui estimerait l'importance de "l'entropie de découpage en domaines Imry-Ma" dans un échantillon.

### 1.1.2.2 Par des études numériques ?

Dans les études numériques qui ont a priori une information directe sur différentes configurations thermiques pour une réalisation fixée du désordre, il est très rare de trouver cette information sur un échantillon, car les résultats publiés sont en général consacrés à des moyennes de diverses observables sur les échantillons. Ce qui est bien sûr dommage du point de vue des approches de type Ma-Dasgupta, où l'information essentielle est justement l'importance des fluctuations thermiques dans un échantillon fixé. En effet, les moyennes sur les échantillons ont toujours le “risque” d’être dominées par des événements rares et de donner une fausse image des comportements typiques. Par exemple, dans le modèle de Sinai, la largeur thermique moyennée sur les échantillons, qui est une observable naturelle à mesurer numériquement pour caractériser l'étalement du paquet thermique, diverge à grand temps. Ce résultat pourrait faire penser qu'il n'y a pas de localisation asymptotiquement, alors qu'en fait, la distance entre deux particules indépendantes dans le même échantillon reste une variable aléatoire finie à temps infini, ce qui correspond à une localisation très forte en loi.

### 1.1.2.3 Hypothèse du désordre fort et sa vérification

En conséquence, la démarche généralement utilisée dans les approches de type Ma-Dasgupta est la suivante : on commence par supposer que le désordre domine à grande échelle, et on vérifie à la fin la consistance de l'hypothèse.

Plus précisément, les procédures de renormalisation de Ma-Dasgupta contiennent leur propre test de validité : si les distributions de probabilité ont une largeur qui croît indéfiniment par le flot de renormalisation, elles conduisent à des résultats asymptotiquement exacts, alors que si la largeur des distributions de probabilité converge vers une valeur finie, elles donnent des résultats qui seront seulement approchés.

## 1.2 La manière de raisonner

Dans la renormalisation de Ma-Dasgupta pour les chaînes de spins quantiques, la procédure correspond à une décimation de degrés de liberté sur l'Hamiltonien : elle est donc assez proche des renormalisations usuelles, la seule différence étant que la décimation se fait de manière itérative sur le couplage le plus fort, au lieu de se faire de manière homogène sur toute la chaîne à chaque étape.

En revanche, dans les renormalisations de type Ma-Dasgupta pour les systèmes de physique statistique qui seront discutés dans ce mémoire, la manière de raisonner s'écarte beaucoup plus des procédures usuelles. En effet, le point de départ n'est pas une intégration exacte ou approchée sur les degrés de liberté du modèle microscopique, c'est à dire sur la fonction de partition pour les problèmes d'équilibre ou sur l'équation maîtresse pour les problèmes dynamiques. Le point de départ est plutôt un argument physique heuristique, qui permet d'identifier a priori les degrés de liberté qui sont importants à grande échelle. On définit alors directement la renormalisation sur ces degrés de liberté jugés importants, et on obtient ainsi dans les cas favorables des

résultats exacts dans la limite asymptotique où la procédure de renormalisation est appliquée un grand nombre de fois. Comme ce mélange entre arguments heuristiques au départ et résultats exacts à la fin peut paraître déconcertant au premier abord, et se heurte même souvent à une certaine incompréhension, il est utile d’analyser en détails les différentes étapes du raisonnement sur le cas du modèle de Sinai (Chapitre 3), qui est le cas le plus pédagogique.

### 1.2.1 Modèles dynamiques : l’exemple du modèle de Sinai

La physique du modèle de Sinai sera décrite dans le chapitre 3 qui lui est consacré. Notre but ici est uniquement de décrire la manière de raisonner sur cet exemple précis.

#### 1.2.1.1 On identifie les degrés de liberté du désordre qui vont être importants à grande échelle

“On part d’un argument physique qualitatif” : il existe depuis longtemps un argument qualitatif simple [22] pour prédire le comportement typique du déplacement en  $x \sim (\ln t)^2$  dans le modèle de Sinai, au lieu du comportement habituel en  $x \sim \sqrt{t}$  de la diffusion pure, que l’on peut résumer ainsi : le temps  $t(x)$  nécessaire pour atteindre le point  $x > 0$  va être dominé par le facteur d’Arrhénus  $e^{\beta B_x}$  correspondant à la plus grande barrière  $B_x$  qu’il faudra franchir par activation thermique pour passer du point de départ  $x = 0$  au point  $x$  (Cette approximation par le facteur d’Arrhénus revient à effectuer une méthode du col sur une expression analytique du temps du premier passage). Dans un potentiel aléatoire Brownien, le comportement typique de la barrière est donné par  $B_x \sim \sqrt{x}$ , ce qui correspond à un temps d’Arrhénus  $t \sim e^{\beta \sqrt{x}}$ , ce qui correspond bien au scaling  $x \sim (\ln t)^2$  après inversion.

“On prend au sérieux cet argument pour déterminer les degrés de liberté qui vont être importants à grande échelle” : l’argument heuristique ci-dessus suggère que les degrés de liberté qui vont être importants à grande échelle sont les grandes barrières qui existent dans le potentiel aléatoire. Plus précisément, à un instant  $t$  fixé, la particule n’aura pas eu le temps de franchir par activation thermique les barrières qui sont plus grandes qu’une échelle d’ordre  $(T \ln t)$ .

#### 1.2.1.2 On définit la renormalisation directement sur les degrés de liberté importants du désordre

On définit donc une procédure de renormalisation sur les barrières du potentiel aléatoire, dans laquelle on élimine de manière itérative la plus petite barrière. Cette barrière minimum définit l’échelle de renormalisation  $\Gamma$  du paysage. Le paysage renormalisé à l’échelle  $\Gamma$  ne contient donc que des barrières plus grandes que  $\Gamma$ , toutes les barrières plus petites ayant été décimées. Lorsque l’échelle  $\Gamma$  augmente, la distribution  $P_\Gamma(F)$  des barrières  $F$  du paysage à l’échelle  $\Gamma$  tend vers une forme d’échelle  $\theta(F \geq \Gamma)P^*\left(\frac{F-\Gamma}{\Gamma}\right)$ , dans laquelle la distribution stationnaire  $P^*$  caractérise le point fixe de désordre infini.



### 1.2.1.3 On établit la correspondance avec le modèle initial

On associe à chaque temps  $t$  du modèle initial, le paysage renormalisé des barrières à l'échelle  $\Gamma = T \ln t$ . On définit une dynamique effective sans fluctuations thermiques, dans laquelle la particule se trouve à l'instant  $t$  au minimum de la vallée renormalisée à l'échelle  $\Gamma = T \ln t$  qui contient la position initiale à  $t = 0$ . On établit aussi une correspondance entre les différentes observables physiques du modèle initial et les propriétés, statiques ou dynamiques, du paysage renormalisé.

### 1.2.1.4 On vérifie la consistance de la procédure dans le régime asymptotique et on étudie les premières corrections

La probabilité que la particule ne soit pas dans la vallée renormalisée de la dynamique effective, est d'ordre  $1/(\ln t)$  et tend donc vers zéro dans la limite des temps infinis, ce qui montre la consistance de la procédure de renormalisation du paysage. On étudie les fluctuations thermiques par rapport à la dynamique effective, en considérant d'une part la distribution de probabilité à l'intérieur de la vallée renormalisée, et d'autre part les événements rares d'ordre  $1/(\ln t)$  où la particule n'est pas dans la vallée renormalisée de la dynamique effective.

### 1.2.1.5 Discussion

Cet exemple montre bien comment cette façon de raisonner permet d'obtenir une description très complète de la dynamique asymptotique à grand temps. Il montre aussi tout l'intérêt de renormaliser de manière inhomogène dans l'espace pour mieux s'adapter aux extrema locaux du désordre aux différentes échelles, par rapport aux renormalisations usuelles qui traitent l'espace de manière homogène avec des cellules de taille fixée à chaque étape.

D'une certaine manière, la démarche que l'on vient de décrire utilise au maximum les idées qualitatives contenues dans la notion de renormalisation, comme la non-pertinence des détails du modèle microscopique sur les comportements à grande échelle, et la convergence vers des théories plus simples représentant des classes d'universalité, *avant* de définir une procédure quantitative. Il ne faut donc pas reprocher aux approches de type Ma-Dasgupta de prendre comme point de départ des arguments physiques qualitatifs, car c'est de là justement que vient toute leur efficacité ! En effet, pour tous les modèles de physique statistique que nous allons considérer, alors qu'une renormalisation usuelle sur le modèle microscopique désordonné n'aurait aucun espoir d'être fermée et d'aboutir à la fin à des résultats exacts, l'approche de Ma-Dasgupta permet décrire une renormalisation fermée asymptotiquement exacte, directement sur les degrés de liberté qui sont vraiment importants à grande échelle.

### 1.2.2 Modèles à l'équilibre : de l'argument Imry-Ma à la renormalisation Ma-Dasgupta !

Pour les systèmes désordonnés à l'équilibre qui seront discutés dans ce mémoire, comme la chaîne d'Ising classique en champ aléatoire (ou la chaîne verre de spin en champ magnétique extérieur qui lui est équivalente par transformation de jauge), ou l'hétéropolymère à une interface, la renormalisation de type Ma-Dasgupta est un moyen de construire les domaines Imry-Ma dans chaque échantillon. Les degrés de liberté importants sont les sommes des énergies aléatoires par domaines, et la renormalisation permet d'éliminer, de manière itérative, les domaines qui sont instables vis à vis d'un retournement global, et d'obtenir ainsi, à la fin, la structure en domaines stables.

## 1.3 Conclusion

Le message essentiel de ce chapitre est donc que les approches de type Ma-Dasgupta ont un sens chaque fois que les hétérogénéités spatiales du désordre déterminent l'état dominant du système, alors que les fluctuations thermiques ou quantiques ne fournissent que des corrections sous-dominantes. Leur but est alors de construire l'état dominant du système pour chaque réalisation du désordre, généralement en fonction d'un paramètre, qui est le temps pour les modèles dynamiques, ou la température pour les problèmes d'équilibre thermodynamique.

Pour mettre en oeuvre ce programme, il faut maintenant préciser les méthodes de calculs utilisées pour effectuer quantitativement la renormalisation sur le désordre : c'est l'objet du Chapitre qui suit.



## Chapitre 2

# Les règles de renormalisation de type Ma-Dasgupta

*Où l'on présente les règles quantitatives de renormalisation de type Ma-Dasgupta, en insistant sur la classe d'universalité des extrema Browniens.*

Alors que les renormalisations pour les systèmes purs portent sur un nombre fini de constantes de couplages, les renormalisations pour les systèmes désordonnés font intervenir des distributions de probabilité, c'est à dire des fonctions qui appartiennent à un espace de dimension infinie, ce qui complique évidemment beaucoup l'analyse des flots de renormalisation et la recherche de points fixes. Cette difficulté conduit donc le plus souvent à des études complètement numériques, ou alors, sur le plan analytique, à des approximations supplémentaires qui consistent à projeter sur des espaces de dimension finie, c'est à dire à choisir une certaine forme analytique de distributions contenant quelques paramètres dont on étudie les évolutions. Dans ce chapitre, nous allons voir que les règles de renormalisation de type Ma-Dasgupta engendrent, dans un certain nombre de cas favorables, des flots de renormalisation assez simples pour permettre un calcul exact de distributions de points fixes, qui ont souvent une interprétation probabiliste intéressante.

### 2.1 Qu'est-ce qu'une règle de renormalisation de type Ma-Dasgupta ?

Si l'on souhaite englober les différentes renormalisations de type Ma-Dasgupta qui ont été développés dans les différents contextes physiques, on peut prendre comme définition générale la structure suivante : dans un système décrit par une collection de variables aléatoires  $\{z_i\}$  qui ont des relations données de voisinage dans l'espace physique, la renormalisation consiste à décimer de manière itérative la plus petite valeur  $\min\{z_i\}$ , avec éventuellement ses variables aléatoires voisines, afin de reconstruire une nouvelle collection de variables aléatoires  $\{z'_i\}$  reliées par de nouvelles relations de

voisinage dans l'espace physique.

Au delà de cette définition générale un peu trop formelle, les deux caractéristiques essentielles sont les suivantes :

- la renormalisation s'effectue sur la valeur extrême d'une variable aléatoire. Cette valeur extrême qui évolue par renormalisation constitue l'échelle de renormalisation : c'est le "cut-off" de la distribution renormalisée.
- la renormalisation est locale dans l'espace : à chaque étape, il n'y a que le voisinage physique immédiat de la variable aléatoire extrême qui est concerné par la renormalisation.

Nous allons maintenant décrire plus précisément les règles qui seront utiles dans les différents systèmes désordonnés unidimensionnels discutés dans ce mémoire. (Quelques exemples en dimension supérieure seront évoqués dans le Chapitre 8 et dans l'Annexe.)

## 2.2 La classe d'universalité des extrema Browniens

Dans les systèmes unidimensionnels avec désordre gelé local, les approches de type Ma-Dasgupta conduisent souvent à une même classe d'universalité qui a une interprétation probabiliste simple en termes d'extrema d'un potentiel Brownien à grande échelle.

### 2.2.1 Les deux exemples quantiques fondamentaux

#### 2.2.1.1 La chaîne antiferromagnétique aléatoire

La règle de décimation proposée par Ma-Dasgupta-Hu [125] pour une chaîne de spin  $S = 1/2$  caractérisée par une suite  $\{J_i\}$  de couplages aléatoires positifs indépendants est la suivante : on cherche le couplage maximum  $\Omega$  dans toute la chaîne, supposons pour fixer les notations que ce soit le couplage  $J_2 = \Omega$ . On élimine ce couplage maximum et ses deux voisins, c'est à dire les trois couplages consécutifs  $(J_1, J_2, J_3)$ , et on les remplace par un nouveau couplage effectif

$$J' = \frac{J_1 J_3}{2\Omega} \quad (2.1)$$

La signification quantique de cette règle sera discutée dans le Chapitre 10, car ici notre but est de discuter uniquement l'aspect probabiliste de cette règle. Comme le nouveau couplage  $J'$  introduit est statistiquement indépendant de tous les autres couplages qui restent dans la chaîne, cette règle de décimation engendre un flot de renormalisation fermé pour la distribution  $P_\Omega(J)$  des couplages  $J$  qui sont présents à l'échelle  $\Omega$  de renormalisation, où  $\Omega$  représente le couplage maximum qui évolue au cours de la renormalisation

$$-\frac{\partial P(J, \Omega)}{\partial \Omega} = P(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega dJ_a \int_0^\Omega dJ_b P(J_a, \Omega) P(J_b, \Omega) \delta\left(J - \frac{J_a J_b}{2\Omega}\right) \quad (2.2)$$

### 2.2.1.2 La chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires (RTFIC en anglais)

Dans le modèle RTFIC, il y a une alternance le long de la chaîne de couplages aléatoires  $J_i$  et de champs aléatoires  $h_i$ , qui sont des variables aléatoires positives indépendantes, tirées a priori avec deux distributions différentes. La physique du modèle sera discutée dans le chapitre 11. Ici, notre but est simplement de décrire les règles de décimation [75] : on choisit à chaque étape le maximum des couplages et des champs  $\Omega = \max\{J_i, h_j\}$ . Si c'est le champ  $h_2 = \Omega$ , on l'élimine avec ses deux couplages voisins  $(J_2, J_3)$  pour former un nouveau couplage effectif

$$J' = \frac{J_2 J_3}{\Omega} \quad (2.3)$$

Si c'est le couplage  $J_2 = \Omega$ , on l'élimine avec ses deux champs voisins  $(h_1, h_2)$  pour former un nouveau champ effectif

$$h' = \frac{h_1 h_2}{\Omega} \quad (2.4)$$

Ici encore, les nouveaux couplages introduits sont statistiquement indépendants de tous les autres couplages qui restent dans la chaîne, ce qui permet d'écrire un système fermé de deux flots de renormalisation pour les distributions  $P_\Omega(J)$  et  $P_\Omega(h)$  des couplages et champs effectifs à l'échelle  $\Omega$ .

Nous allons maintenant expliquer comment ces règles qui apparaissent dans les chaînes de spins quantiques peuvent s'interpréter en termes de statistique des extrema d'une marche aléatoire à grande échelle.

### 2.2.2 Extrema des marches aléatoires à grande échelle

Dans plusieurs modèles de physique statistique que nous allons considérer, il existe un seul type de variables aléatoires  $(f_i)$  sur une ligne, mais ces variables aléatoires peuvent être positives ou négatives. Ces variables aléatoires représentent par exemple les forces locales dans le modèle de Sinai (Chapitres 3 et 4), les champs aléatoires dans la chaîne d'Ising classique en champ aléatoire (Chapitre 5), les charges dans le modèle du polymère hydrophile/hydrophobe (Chapitre 6). Dans les approches de type Ma-Dasgupta pour ces différents modèles, les degrés de liberté importants du désordre sont les extrema du potentiel associé  $U(i) = \sum_{j=0}^i f_j$  à grande échelle.

Pour définir les extrema du potentiel initial, il faut donc commencer par grouper ensemble toutes les forces  $f_i$  consécutives de même signe : on obtient alors un paysage constitué par une alternance de liens descendants  $(F_i^+, l_i^+)$  et de liens montants  $(F_i^-, l_i^-)$ . Les barrières  $F$  et les longueurs  $l$  sont maintenant des variables aléatoires positives qui représentent respectivement les différences de potentiel et les distances entre deux extrema locaux consécutifs du modèle initial. La règle de renormalisation du paysage est alors la suivante (Publications [P3,P4]) : on choisit la plus petite barrière  $\Gamma = \min\{F_i^+, F_i^-\}$ . Si la plus petite barrière est un lien descendant  $F_2^+ = \Gamma$ , on l'élimine

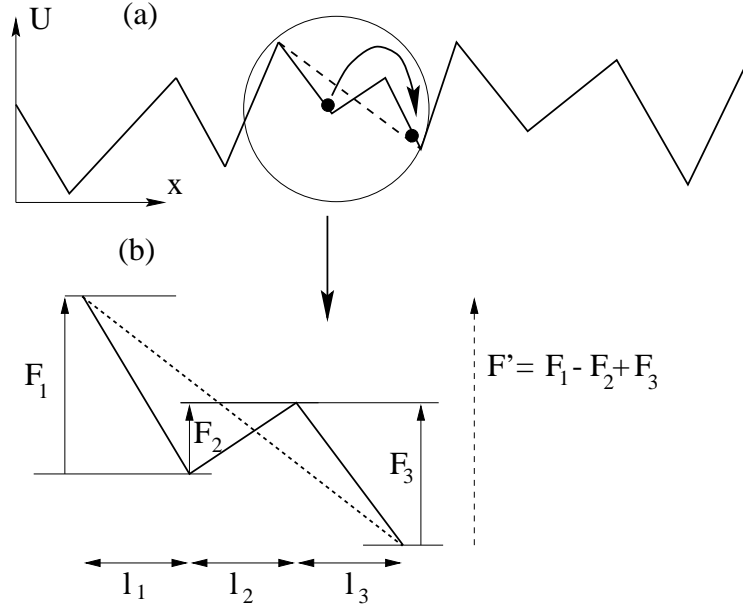


FIG. 2.1 – *Illustration des règles de renormalisation pour un potentiel aléatoire unidimensionnel.*

avec ces deux liens montants voisins  $F_1^-$  et  $F_2^-$  pour former un nouveau lien montant

$$(F^-)' = F_1^- + F_2^- - \Gamma \quad (2.5)$$

Si la plus petite barrière est un lien montant  $F_1^- = \Gamma$ , on l'élimine avec ces deux liens descendants voisins  $F_1^+$  et  $F_2^+$  pour former un nouveau lien descendant

$$(F^+)' = F_1^+ + F_2^+ - \Gamma \quad (2.6)$$

Ces règles sont donc complètement équivalentes aux règles de décimations (2.3 2.4) du modèle RTFIC par une simple transformation logarithmique sur les variables. Si l'on souhaite garder une information sur les distances initiales dans l'espace physique, il suffit d'écrire la règle d'évolution de la longueur lors d'une décimation : la longueur du nouveau lien renormalisé est simplement égale à la somme des trois liens éliminés

$$l' = l_1 + l_2 + l_3 \quad (2.7)$$

Cette nouvelle longueur a encore la propriété d'être indépendante statistiquement des autres longueurs qui restent dans le système. En revanche, la longueur va être corrélée avec la barrière  $F$  qui existe sur le même lien. Ainsi, on peut écrire un système fermé de deux équations de flots pour les deux lois jointes  $P^\pm(F, l)$ .

### 2.2.3 Distribution des extrema du potentiel Brownien pur

Le cas symétrique  $\bar{f}_i = 0$  des modèles statistiques correspond au point critique quantique du modèle RTFIC  $\overline{\ln J} = \overline{\ln h}$  où l'aimantation spontanée s'annule. A grande

échelle, les liens descendants et les liens montants deviennent statistiquement équivalents, et le seul paramètre physique pertinent est la variance  $\overline{f_i^2} = 2\sigma$  du modèle initial, comme dans le théorème de la Limite Centrale. Il existe alors un point fixe de “désordre infini” caractérisé par une distribution jointe  $P^*(\eta, \lambda)$  des variables d'échelle  $\eta = \frac{F-\Gamma}{\Gamma}$  pour les barrières et  $\lambda = \frac{\sigma l}{\Gamma^2}$  pour les longueurs. Cette loi jointe qui caractérise le point fixe, est définie par sa transformée de Laplace par rapport à la longueur  $\lambda$  [75]

$$\int_0^{+\infty} d\lambda e^{-p\lambda} \mathcal{P}^*(\eta, \lambda) = \theta(\eta > 0) \frac{\sqrt{p}}{\sinh \sqrt{p}} e^{-\eta \sqrt{p} \coth \sqrt{p}} \quad (2.8)$$

En particulier, la distribution des barrières seules est une simple exponentielle

$$\mathcal{P}^*(\eta) = \theta(\eta > 0) e^{-\eta} \quad (2.9)$$

alors que la distribution des longueurs seules a la forme d'une série infinie d'exponentielles

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^*(\lambda) &= LT_{p \rightarrow \lambda}^{-1} \left( \frac{1}{\cosh \sqrt{p}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi(-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\pi^2 (n + \frac{1}{2})^2 \lambda} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{3/2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left( m + \frac{1}{2} \right) e^{-(m + \frac{1}{2})^2 \frac{1}{\lambda}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

(les deux séries se correspondent par une formule d'inversion de Poisson).

La convergence vers la solution de point fixe (2.8) est d'ordre  $1/\Gamma$  pour les marches aléatoires [75]. En revanche, pour le mouvement Brownien unidimensionnel qui représente déjà la limite continue universelle des marches aléatoires, le point fixe (2.8) est un résultat exact à toute échelle  $\Gamma$ , comme le montre un calcul direct par des intégrales de chemin contraintes (Publication [P9]).

#### 2.2.4 Distribution des extrema du potentiel Brownien biaisé

Dans le cas dissymétrique où il existe un biais  $\overline{f_i} = f_0 > 0$ , les équations de renormalisation conduisent à une famille de solutions à un paramètre noté  $\delta$  [75] : les deux distributions jointes  $P_\Gamma^\pm(F, l)$  des liens descendants et montants ont pour transformées de Laplace

$$\int_0^{+\infty} dl e^{-pl} P_\Gamma^{*\pm}(F, l) = \theta(F > \Gamma) \frac{\sqrt{p + \delta^2} e^{\mp \delta \Gamma}}{\sinh \sqrt{p + \delta^2}} e^{-(F-\Gamma) [\sqrt{p + \delta^2} \coth \sqrt{p + \delta^2} \mp \delta]} \quad (2.11)$$

En particulier, les distributions de barrières seules ont les formes exponentielles suivantes

$$P_\Gamma^{*+}(F) = \theta(F > \Gamma) \frac{2\delta}{e^{2\delta\Gamma} - 1} e^{-(F-\Gamma) \frac{2\delta}{e^{2\delta\Gamma} - 1}} \underset{\Gamma \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{2\delta}{e^{2\delta\Gamma}} e^{-(F-\Gamma) \frac{2\delta}{e^{2\delta\Gamma}}} \quad (2.12)$$

$$P_\Gamma^{*-}(F) = \theta(F > \Gamma) \frac{2\delta}{1 - e^{-2\delta\Gamma}} e^{-(F-\Gamma) \frac{2\delta}{1 - e^{-2\delta\Gamma}}} \underset{\Gamma \rightarrow \infty}{\simeq} \theta(F > \Gamma) 2\delta e^{-(F-\Gamma) 2\delta} \quad (2.13)$$



Du point de vue du paysage renormalisé, la signification du paramètre  $2\delta$  est donc claire : la distribution  $P_{\Gamma}^{*-}(F)$  des grandes barrières opposées au biais  $f_0$  reste stable à grande échelle (en dehors de la présence du cut-off  $\Gamma$ ) et  $(2\delta)$  est le coefficient de la décroissance asymptotique exponentielle de cette distribution. Il faut maintenant préciser la signification du paramètre  $\delta$  par rapport au modèle microscopique de départ.

Près du point critique correspondant à  $\delta = 0$ , le paramètre  $\delta$  peut être développé au premier ordre dans le biais [75]

$$\delta = \frac{f_0}{\sigma} + O(f_0^2) \quad (2.14)$$

Si l'on s'écarte du voisinage immédiat du point critique, la bonne définition non-perturbative du paramètre  $\delta$  en terme de la distribution initiale  $Q(f)$  des variables  $(f_i)$  du modèle microscopique de départ est que  $\delta$  représente la solution de l'équation (Publication [P4])

$$\overline{e^{-2\delta f_i}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} df Q(f) e^{-2\delta f} = 1 \quad (2.15)$$

Cette définition correspond bien sûr exactement, au changement de notation près  $2\delta = \mu/T$ , à la définition du paramètre sans dimension  $\mu$  qui représente l'exposant de la phase de diffusion anormale  $x \sim t^\mu$  des modèles de Sinai avec biais [114, 57, 22], dont nous reparlerons dans le chapitre 4. Le développement dans les deux premiers cumulants redonne bien l'expression simple (2.14), qui n'est exacte à tous les ordres que pour une distribution gaussienne.

A nouveau, si l'on considère directement le mouvement Brownien unidimensionnel biaisé comme limite continue des marches aléatoires biaisées, les solutions (2.11) sont des résultats exacts à toute échelle  $\Gamma$ , comme le montre un calcul direct par des intégrales de chemin contraintes (Publication [P9]).

Alors que la solution (2.8) du cas symétrique  $\delta = 0$  est un point fixe de “désordre infini”, la solution (2.13) du cas dissymétrique  $\delta > 0$  est un point fixe de “désordre fini”, car la distribution  $P_{\Gamma}^{*-}(F)$  des grandes barrières opposées au biais a asymptotiquement une largeur finie  $\frac{1}{2\delta}$ . La renormalisation usuelle de type Ma-Dasgupta ne donne donc des résultats exacts que dans la limite  $\delta \rightarrow 0$ . Nous discuterons en détails dans le Chapitre 4 comment généraliser la méthode usuelle lorsque le paramètre  $\delta$  est petit.

## 2.3 Renormalisation d'un potentiel aléatoire unidimensionnel quelconque

Comme la renormalisation de type Ma-Dasgupta consiste à étudier les extrema d'un potentiel unidimensionnel lorsqu'on ne garde que les barrières supérieures à une certaine échelle  $\Gamma$ , il est possible de définir la procédure pour un paysage aléatoire quelconque. En particulier, la procédure de renormalisation peut être implémentée numériquement pour des potentiels corrélés, ce qui a été fait pour le cas de corrélations logarithmiques [39]. La Publication [P9] étudie ce que l'on peut dire de manière analytique pour le cas

des potentiels Markoviens. Nous décrirons en particulier la solution explicite pour le cas d'un potentiel Brownien en présence d'un potentiel déterministe harmonique dans le Chapitre 7.

## 2.4 Règles de décimation plus générales

Dans certains systèmes unidimensionnels, en particulier pour la chaîne quantique de spin  $S = 1$  discutée dans le Chapitre 10, on est amené à définir des procédures de renormalisation plus compliquées que la renormalisation d'un potentiel unidimensionnel, ce qui peut donner lieu à des phénomènes plus riches : en particulier, pour la chaîne quantique de spin  $S = 1$ , cela permet de décrire une transition de phase de type percolation à température nulle.

## 2.5 Variables auxiliaires et exposants critiques

Dans les renormalisations de type Ma-Dasgupta, on appelle 'variables auxiliaires' les variables associées aux liens qui vont évoluer selon des règles de décimation parallèles lorsque leurs variables principales associées sont renormalisées. Le premier exemple important est la longueur  $l$  que nous avons déjà rencontrée (2.7). C'est une variable auxiliaire car ce n'est pas elle qui détermine la renormalisation, mais la barrière associée  $F$  : en effet à chaque étape, on ne choisit pas la longueur minimale, on choisit la barrière  $F$  minimale.

Une autre variable auxiliaire importante pour le RTFIC est l'aimantation  $m$  des amas de spins : cette variable n'existe qu'en association avec les champs aléatoires  $h_i$  et évolue en association avec la règle (2.4) selon [75]

$$m' = m_1 + m_2 \quad (2.16)$$

Plus généralement, dans les différents modèles discutés dans ce mémoire, que ce soit pour la diffusion de Sinai (Chapitre 3), pour la chaîne d'Ising classique en champ aléatoire (Chapitre 5), et pour les problèmes de réaction-diffusion (Publication [P5]), on est conduit à étudier diverses variables auxiliaires qui évoluent selon la règle générale

$$m' = am_1 + bm_2 + cm_3 \quad (2.17)$$

où  $(a, b, c)$  sont des constantes.

Nous avons déjà vu comment l'étude jointe des barrières et des longueurs caractérisent la statique du paysage renormalisé à une échelle donnée (2.8) : en particulier, dans le paysage renormalisé à l'échelle  $\Gamma$ , dans lequel il ne reste que des barrières  $F > \Gamma$ , les longueurs ont pour scaling  $l \sim \Gamma^2$ , ce qui est le scaling Brownien usuel comme il se doit. En revanche, en dehors de ce cas très particulier  $a = b = c = 1$ , les variables auxiliaires (2.17) conduisent à des exposants non-triviaux  $m \sim \Gamma^\Phi$  qui reflètent des propriétés 'dynamiques' de la renormalisation sur toutes les échelles précédentes  $\Gamma' < \Gamma$ , et qui contiennent plus d'informations que le paysage à l'échelle  $\Gamma$  seulement. Par exemple

pour le RTFIC, la règle très simple (2.16) correspondant à  $a = c = 1$  et  $b = 0$  conduit pour l'aimantation  $m \sim \Gamma^\phi$  à l'exposant irrationnel égal au nombre d'or [75]

$$\phi(a = c = 1, b = 0) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (2.18)$$

Cet exemple montre qu'une simple marche aléatoire unidimensionnelle contient des exposants non-triviaux si l'on s'intéresse à des propriétés un peu 'subtiles' qui concernent la dynamique du paysage des extrema en fonction de l'échelle.

Plus généralement, pour une variable auxiliaire de type (2.17), on obtient que, lorsque la condition  $a + c = 2$  est satisfaite (ce qui arrive assez souvent en pratique pour les observables physiques les plus naturelles), l'exposant associé satisfait une équation du second degré et vaut

$$\phi(a + c = 2, b) = \frac{1 + \sqrt{5 + 4b}}{2} \quad (2.19)$$

En revanche, lorsque  $a + c \neq 2$ , l'exposant  $\phi(a, b, c)$  satisfait une équation plus compliquée faisant intervenir la fonction hypergéométrique confluyente  $U(A, B, z)$  (Publications [P4] et [P5]).

## 2.6 Comparaison avec certains modèles de croissance

Les décimations de type Ma-Dasgupta ont une grande parenté avec certains modèles de croissance, qui ont été introduits de manière complètement indépendante. Ces modèles géométriques de croissance considèrent une suite d'intervalles sur une ligne qui évolue par une transformation itérative sur le plus petit segment qui reste, avec les diverses règles suivantes :

(i) dans le “cut-in-two model” [61], l'intervalle le plus petit est éliminé et donne une moitié de sa longueur à chacun de ces deux voisins. Ce modèle introduit donc des corrélations entre les intervalles voisins et a été étudié numériquement [61].

(ii) dans le “paste-all model” [61], l'intervalle le plus petit est éliminé et donne toute sa longueur à l'un de ces deux voisins tiré au hasard de manière équiprobable. Ce modèle n'introduit pas de corrélations entre les intervalles voisins, et la distribution invariante des longueurs a été calculée [61].

(iii) dans le “instantaneous collapse model” [151], l'intervalle le plus petit est éliminé avec ses deux voisins pour former un seul nouveau domaine  $l' = l_1 + l_2 + l_3$ . Ce modèle décrit en fait la dynamique effective à grand temps d'un champs scalaire unidimensionnel qui évolue selon une équation de Ginzburg-Landau à température nulle [140, 151], et a donc suscité un grand intérêt en tant que modèle soluble de croissance. Les résultats exacts concernant la distribution invariante des longueurs [151]), l'exposant de persistance [31] qui caractérise la variable auxiliaire  $d' = d_1 + d_3$ , l'exposant d'autocorrélation [32] qui caractérise la variable auxiliaire  $q' = q_1 - q_2 + q_3$  et enfin l'exposant de persistance généralisé [126] qui caractérise la variable auxiliaire  $m' = m_1 + pm_2 + m_3$  avec un paramètre  $p$ .

La seule différence ‘technique’ avec les règles de décimation de type Ma-Dasgupta est que, dans les modèles de croissance, c’est la longueur qui est la variable principale qui détermine la renormalisation, alors que dans les modèles désordonnés, la longueur n’est qu’une variable auxiliaire, la variable principale qui définit la dynamique étant une variable de désordre. Cette différence explique les différences analytiques entre les solutions de points fixes et d’exposants dans les deux types de modèles.

D’un point de vue physique, cet exemple montre qu’une dynamique sans désordre intrinsèque, définie à partir d’une condition initiale aléatoire, peut être gouvernée, d’une certaine manière, par un ‘point fixe de désordre infini’.

## 2.7 Conclusion

La spécificité des règles de renormalisation de type Ma-Dasgupta est de décimer localement une variable extrême de désordre de manière itérative. Cette structure très particulière permet souvent d’obtenir en dimension  $d = 1$  des solutions explicites pour les distributions de probabilité du paysage et pour les exposants critiques associées aux variables auxiliaires représentant des observables physiques intéressantes.

Ce Chapitre 2 termine la présentation générale des méthodes de type Ma-Dasgupta. Le reste du mémoire est consacré à l’application de ces méthodes à divers modèles désordonnés de physique statistique ou de matière condensée.



## Chapitre 3

# Marche aléatoire dans un potentiel Brownien

### 3.1 Présentation du modèle

Le modèle d'une marche aléatoire dans un potentiel aléatoire Brownien, qui porte aujourd'hui le nom de "modèle de Sinai", a beaucoup intéressé les mathématiciens probabilistes depuis les travaux de Solomon [158] Kesten *et al.* [114] et Sinai [156], ainsi que les physiciens des systèmes désordonnés depuis les travaux initiaux de Alexander *et al.* [4] et Derrida-Pomeau [57]. Depuis, il y a eu de nombreux développements dans les deux communautés : la revue récente [171] contient une présentation des références importantes pour les mathématiciens probabilistes, alors que les différentes approches des physiciens sont présentées dans les revues [90, 91, 22].

Pour les physiciens, l'intérêt du modèle de Sinai est double : d'une part, la marche de Sinai représente un modèle dynamique simple en présence de désordre, sur lequel on peut tester un certain nombre de concepts généraux, et d'autre part, elle apparaît naturellement dans divers contextes, par exemple dans la dynamique d'une paroi de domaine dans la chaîne d'Ising en champs aléatoires (cf Chapitre 5) ou dans la dynamique d'ouverture de la double hélice d'ADN en présence d'une force extérieure [122].

#### 3.1.1 Version continue : Diffusion dans un potentiel Brownien

La version continue du modèle de Sinai correspond à l'équation de Langevin [22]

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x(t)) + \eta(t) \quad (3.1)$$

dans laquelle  $\eta(t)$  représente le bruit thermique usuel

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2T\delta(t - t') \quad (3.2)$$

et  $U(x)$  est un potentiel aléatoire Brownien

$$\overline{(U(x) - U(y))^2} = 2\sigma|x - y| \quad (3.3)$$

Plus généralement, dans tout le mémoire, la moyenne thermique d'une observable  $f$  sera notée  $\langle f \rangle$ , et la moyenne sur le désordre d'une observable  $f$  sera notée  $\overline{f}$ .

### 3.1.2 Version discrète : Marche aléatoire sur réseau 1D

Dans la version discrète sur réseau (Figure 3.1), la particule qui se trouve sur le site  $i$  a une probabilité  $\omega_i$  de sauter vers la droite et une probabilité  $(1 - \omega_i)$  de sauter vers la gauche. Les  $\omega_i$  sont des variables aléatoires indépendantes dans  $]0, 1[$ . La marche aléatoire est récurrente seulement si  $\overline{\ln \omega_i} = \overline{\ln(1 - \omega_i)}$ , ce qui constitue le cas de Sinai, et qui correspond à l'absence de biais du potentiel  $U(x)$  (3.3) de la version continue.

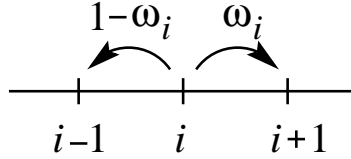


FIG. 3.1 – Version discrète du modèle de Sinai

## 3.2 Principe de l'approche de renormalisation

Nous avons déjà expliqué dans le premier chapitre (Page 11) la manière de raisonner sur l'exemple du modèle de Sinai.

L'idée essentielle de notre approche est de décomposer le processus  $x_{U,\eta}(t)$ , représentant la position de la marche aléatoire engendrée par le bruit thermique  $\eta(t)$  dans le potentiel aléatoire Brownien  $U(x)$ , selon une somme de deux termes

$$x_{\{U,\eta\}}(t) = m_{\{U\}}(t) + y_{\{U,\eta\}}(t) \quad (3.4)$$

- **Le processus  $m_{\{U\}}(t)$  porte le nom de “dynamique effective”** dans les publications et représente la position la plus probable de la particule à l'instant  $t$  : elle correspond au meilleur minimum local du potentiel aléatoire  $U(x)$  que la particule a eu typiquement le temps d'atteindre depuis sa condition initiale pendant l'intervalle de temps  $t$ . Comme le franchissement d'une barrière de potentiel  $F$  nécessite un temps d'Arrhénius d'ordre  $t_F = \tau_0 e^{\beta F}$ , on peut étudier en détail cette dynamique effective en utilisant une procédure de renormalisation de type Ma-Dasgupta, qui consiste à décimer de manière itérative les plus petites barrières qui existent dans le système. On associe alors au temps  $t$  le paysage renormalisé dans lequel il ne reste plus que des barrières plus grandes que l'échelle de renormalisation  $\Gamma = T \ln t$ , ce qui correspond à une échelle  $\Gamma^2 = (T \ln t)^2$  pour les longueurs. La position  $m_{\{U\}}(t)$  correspond alors au minimum de la vallée renormalisée à l'échelle  $\Gamma = T \ln t$  qui contient le point initial.

- Le processus  $y_{\{U,\eta\}}(t)$  représente l'écart par rapport à la dynamique effective. Dans la limite de temps infini, c'est un variable aléatoire qui reste finie, ce qui constitue le phénomène de **localisation de Golosov** : toutes les particules qui diffusent

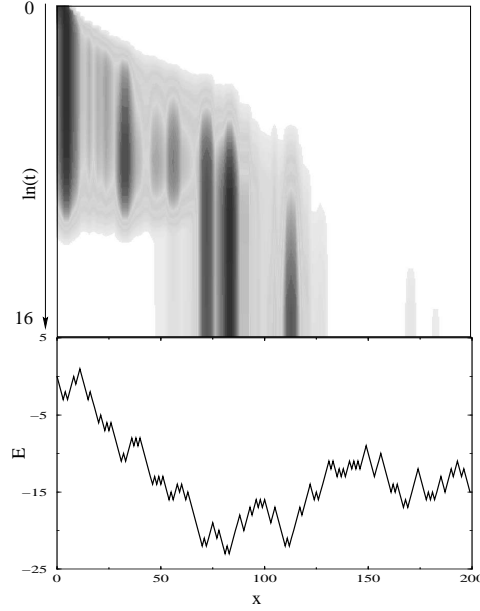


FIG. 3.2 – *Figure tirée de la référence [40] de J. Chave and E. Guitter, avec sa légende “Evolution with time (in logarithmic scale) of the distribution  $P(x, t)$  in a given energy landscape (drawn below). The evolution runs over  $10^7$  iterations. The intensity in the grey scale is proportional to  $(-\ln P(x, t))$ , i.e. darker regions correspond to higher values of  $P(x, t)$ .”*

dans le même échantillon à partir du même point de départ avec des bruits thermiques  $\eta$  différents sont asymptotiquement concentrées dans la même vallée de minimum  $m_{\{U\}}(t)$ . Plus précisément, si on considère les premières corrections à grand temps, la probabilité qu’une particule ne soit pas dans la vallée correspondant à la dynamique effective  $m_{\{U\}}(t)$  est d’ordre  $1/(\ln t)$ , auquel cas la particule se trouve à une distance d’ordre  $(\ln t)^2$  de  $m_U(t)$ . Ces événements sont donc rares (leur probabilité tend vers zéro à grand temps) mais ils dominent cependant certaines observables, comme par exemple la largeur thermique  $\Delta x^2(t) \sim \overline{y^2(t)} \sim (\ln t)^3$  qui diverge.

### 3.3 Étude de la dynamique effective

#### 3.3.1 Front de diffusion

A cause du phénomène de localisation de Golosov, la distribution de la variable d’échelle  $X = \frac{x_{\{U, \eta\}}}{(T \ln t)^2}$ , par rapport au bruit  $\eta$  dans un échantillon fixé est asymptotiquement une distribution delta de Dirac  $\delta(X - M)$  où  $M = \frac{m_{\{U\}}(t)}{(T \ln t)^2}$  est la variable d’échelle de la dynamique effective. Si l’on souhaite maintenant calculer la moyenne du front de diffusion moyen sur l’ensemble des échantillons (ou l’ensemble des conditions initiales, ce qui revient ici au même), il suffit d’étudier la distribution de  $M$ , et on



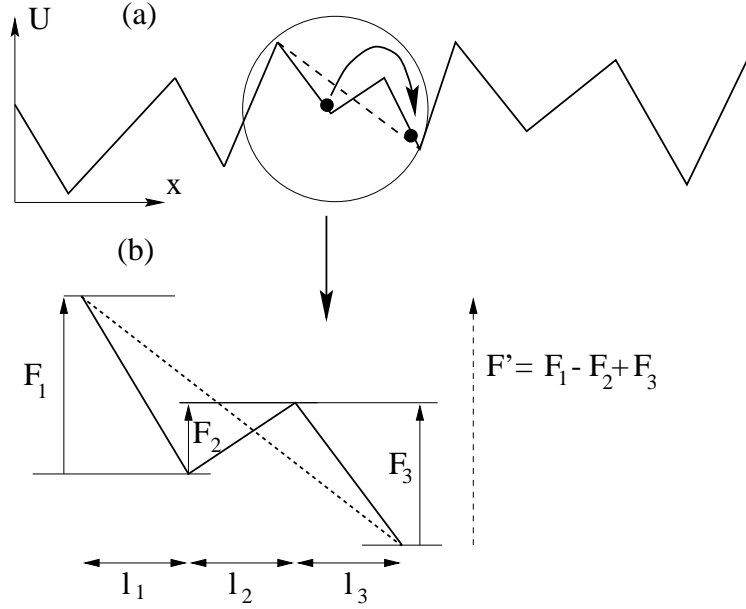


FIG. 3.3 – Principe de la renormalisation pour étudier la dynamique effective  $m(t)$

retrouve ainsi très simplement la loi de Kesten

$$P(X) = LT_{p \rightarrow |X|}^{-1} \left[ \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \sqrt{p}} \right) \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\frac{\pi^2}{4}(2n+1)|X|} \quad (3.5)$$

qui est un résultat exact des mathématiciens probabilistes [115, 86]. Cet exemple montre explicitement comment la procédure de renormalisation de type Ma-Dasgupta permet d’obtenir des résultats asymptotiques exacts, et donne confiance dans les résultats nouveaux qu’elle donne pour des propriétés plus fines pour lesquelles il n’existe pas de “théorème” correspondant.

### 3.3.2 Distribution de l’ énergie

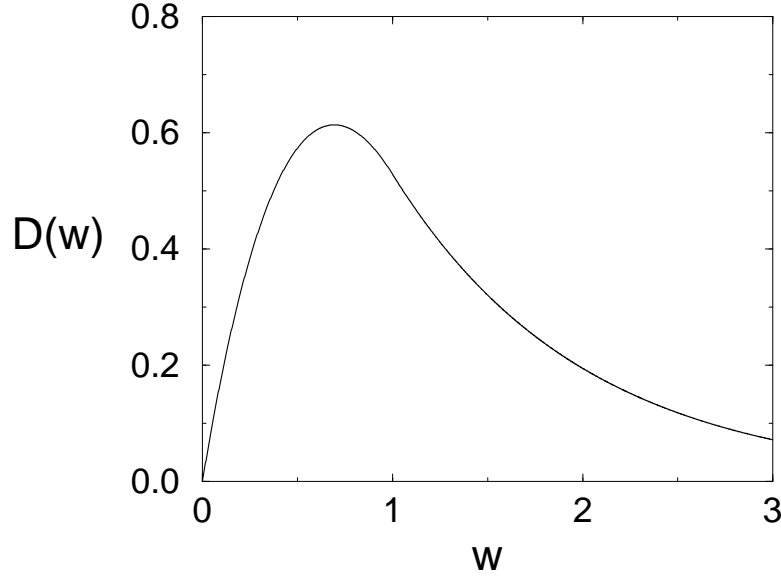
De même, la variable d’échelle pour l’ énergie

$$w = \frac{U(x(0)) - U(x(t))}{(T \ln t)} \simeq \frac{U(m(0)) - U(m(t))}{(T \ln t)}$$

est entièrement déterminée à grand temps par la seule dynamique effective. Cette variable réduite a pour loi limite quand  $t \rightarrow \infty$  :

$$\mathcal{D}(w) = \theta(w < 1) (4 - 2w - 4e^{-w}) + \theta(w \geq 1) (2e - 4) e^{-w}$$

La loi est continue, ainsi que sa dérivée en  $w = 1$ , mais la dérivée seconde est discontinue en  $w = 1$ , ce qui peut sembler surprenant ! En effet, pour tout temps fini, la

FIG. 3.4 – *Distribution limite de la variable d'échelle pour l' énergie.*

distribution de l' énergie est analytique, et ce n'est que dans la limite de temps infini que la loi limite de la variable d'échelle présente une discontinuité de la dérivée seconde. Il est intéressant de noter que dans le travail récent d'un mathématicien probabiliste [94] sur le temps de retour à l'origine après l'instant  $t$ , il apparaît aussi une distribution asymptotique non-analytique pour une variable d'échelle qui représente aussi une variable de type énergie et qui correspond aussi au point  $w = 1$  dans nos notations.

Nous avons aussi calculé la loi limite jointe de la position  $X = \frac{x(t)-x(0)}{(T \ln t)^2}$  et de l' énergie  $w = \frac{U(x(0))-U(x(t))}{(T \ln t)}$ , qui est définie par les deux expressions suivantes en transformation de Laplace

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dX e^{-sX} \mathcal{P}(X, w > 1) &= \frac{\sinh \sqrt{s}}{\sqrt{s}} \left( e^{\sqrt{s} \coth \sqrt{s}} - 2 \cosh \sqrt{s} \right) e^{-w \sqrt{s} \coth \sqrt{s}} \\ \int_0^{+\infty} dX e^{-sX} \mathcal{P}(X, w < 1) &= \frac{\sinh \sqrt{s}(2-w)}{\sqrt{s}} - \frac{\sinh 2\sqrt{s}}{\sqrt{s}} e^{-w \sqrt{s} \coth \sqrt{s}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.3.3 Propriétés de vieillissement

Le front de diffusion à deux temps  $\overline{P(x, t; x', t' | 0, 0)}$  présente un régime de vieillissement en  $(\ln t / \ln t')$ . Dans les variables d'échelle  $X = (x / \ln^2 t)$  et  $X' = (x' / \ln^2 t)$ , le front de diffusion est déterminé par la dynamique effective. La procédure de renormalisation permet de calculer la loi jointe des positions  $\{m(t), m(t_w)\}$  à deux temps successifs  $t \geq t_w$  (Publication [P4]). En particulier, ce front de diffusion à deux temps présente une fonction  $\delta(X - X')$  de Dirac, qui traduit le fait qu'une particule peut se trouver piégée dans une vallée dont elle n'arrive pas à sortir entre  $t'$  et  $t$ . Le poids

$D(t, t_w)$  de cette fonction  $\delta(X - X')$  qui représente la probabilité d'avoir  $m(t) = m(t_w)$  a pour expression

$$D(t, t_w) = \frac{1}{3} \left( \frac{\ln t_w}{\ln t} \right)^2 \left( 5 - 2e^{1 - \left( \frac{\ln t}{\ln t_w} \right)} \right) \quad (3.7)$$

Ce résultat caractérise bien ce qu'on appelle "vieillessement" : plus  $t_w$  est grand, plus la particule a trouvé une "bonne" vallée et plus il faudra de temps pour en sortir.

### 3.3.4 Statistique des retours à l'origine de $m(t)$

La procédure de renormalisation permet aussi de montrer que la distribution de la séquence  $\Gamma_1 = T \ln t_1$ ,  $\Gamma_2 = T \ln t_2 \dots$  des temps de retour à l'origine de la dynamique effective  $m(t)$  a une structure simple : c'est un processus Markovien multiplicatif défini par la récurrence  $\Gamma_{k+1} = \alpha_k \Gamma_k$ , dans laquelle les coefficients  $\{\alpha_i\}$  sont des variables aléatoires indépendantes, de loi

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\alpha^{1+\lambda_-}} - \frac{1}{\alpha^{1+\lambda_+}} \right) \text{ avec } \lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (3.8)$$

Deux conséquences importantes :

- Le nombre total  $R(t)$  de retours à l'origine pendant  $[0, t]$  se comporte en

$$R(t) \sim \frac{1}{3} \ln(T \ln t) \quad (3.9)$$

alors que le nombre total  $S(t)$  de sauts pendant  $[0, t]$  se comporte en

$$S(t) \sim \frac{4}{3} \ln(T \ln t) \quad (3.10)$$

(mais ici il y a des corrélations entre les temps de sauts.)

- La probabilité que  $m(\tau) > 0$  pour  $\tau \in ]0, t]$  met en jeu un exposant de persistance irrationnel

$$\Pi(t) \sim \left[ \frac{1}{(T \ln t)^2} \right]^{\bar{\theta}} \text{ avec } \bar{\theta} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = 0.19...$$

alors que la probabilité qu'un marcheur donné  $x(t)$  ne repasse pas par l'origine  $x(o)$  pendant  $]0, t]$  a un exposant de persistance simple

$$\Pi_1(t) \sim \left[ \frac{1}{(T \ln t)^2} \right]^{\theta} \text{ avec } \theta = \frac{1}{2}$$

### 3.4 Étude des propriétés de localisation

#### 3.4.1 Distribution asymptotique du paquet thermique

La distribution de la position relative  $y = x(t) - m(t)$  par rapport à la position  $m(t)$  de la dynamique effective a pour limite à temps infini une distribution de Boltzmann dans une vallée Brownienne infinie

$$P(y) = \left\langle \frac{e^{-\beta U_1(y)}}{\int_0^\infty dx e^{-\beta U_1(x)} + \int_0^\infty dx e^{-\beta U_2(x)}} \right\rangle_{\{U_1, U_2\}} \quad (3.11)$$

où l'on moyenne sur deux trajectoires Browniennes  $\{U_1, U_2\}$  qui forment une vallée infinie. Cette formulation est bien équivalente au théorème de Golosov [85]. La loi  $P(y)$  peut être calculée en transformée de Laplace en termes de fonctions de Bessel (Publication [P8]) En particulier, on obtient le comportement asymptotique algébrique

$$P(y) \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{y^{3/2}} \quad (3.12)$$

qui peut être interprété ainsi : alors que les configurations  $U(y)$  typiques donnent une décroissance en  $e^{-\beta\sqrt{\sigma y}}$  pour le facteur de Boltzmann, il existe des configurations rares qui reviennent près de  $U \sim 0$  à une grande distance  $y$  avec une probabilité en  $1/(y^{3/2})$ . Nous avons aussi calculé la fonction de corrélation à deux particules

$$C(l) = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \overline{[P(x, t|x_0, 0)P(x+l, t|x_0, 0)]} \quad (3.13)$$

qui décroît aussi algébriquement en  $1/l^{3/2}$ .

#### 3.4.2 Paramètres de localisation

Les paramètres de localisation, qui mesurent les probabilités moyennes de trouver  $k$  particules au même point à temps infini

$$Y_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \overline{[P(x, t|x_0, 0)]^k} = \frac{\Gamma^3(k)}{\Gamma(2k)} (\sigma\beta^2)^{k-1} \quad (3.14)$$

ont un comportement à grand  $k$  qui est dominé par les vallées très étroites qui ont une petite fonction de partition (Publication [P8]).

#### 3.4.3 Comparaison avec les fonctions d'équilibre

Ces différentes observables qui caractérisent la statistique du paquet thermique dans la diffusion de Sinai coïncident en fait avec leurs analogues statiques définies par la limite thermodynamique de la distribution de Boltzmann dans un potentiel Brownien sur un intervalle (Publication [P8]). Cette convergence vers l'équilibre du paquet thermique (alors que la dynamique effective reste indéfiniment hors équilibre) n'est plus vraie dès qu'on ajoute une force constante (cf Chapitre 4)

### 3.4.4 Largeur thermique et évènements rares

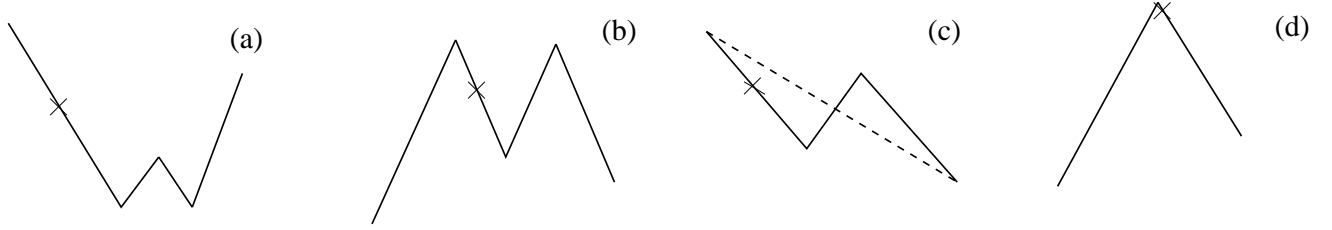


FIG. 3.5 – Représentation des trois types (a) (b) (c) d'évènements rares d'ordre  $1/\Gamma$  qui dominent la largeur du paquet thermique à grand temps ( la croix représente la condition initiale). Le cas (d) est un exemple d'évènement rare d'ordre  $1/\Gamma^2$  qui donne une contribution sous-dominante.

La décroissance algébrique (3.12) de la distribution asymptotique de la position relative implique que le second moment  $\overline{\langle y^2 \rangle}$  diverge à temps infini. Pour obtenir son comportement à grand temps, il faut prendre en compte les évènements rares suivants (Publication [P6]) :

(a) une vallée renormalisée peut avoir deux minima éloignés dans l'espace qui sont presque dégénérés en énergie.

(b) deux barrières voisines peuvent être presque dégénérées.

(c) une barrière peut être en train d'être décimée ( $\Gamma + \epsilon$ )

Ces évènements rares, représentés sur la Figure 3.5, ont tous les trois une probabilité faible d'ordre  $1/\Gamma$ , mais ils donnent lieu à division du paquet thermique en deux sous-paquets, séparés par une grande distance d'ordre  $\Gamma^2$ . En conséquence, ce sont ces évènements qui dominent la largeur thermique

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle} - \overline{\langle x(t) \rangle^2} \underset{t \rightarrow \infty}{\propto} \frac{T}{\Gamma} (\Gamma^2)^2 = T(T \ln T)^3 \quad (3.15)$$

et plus généralement tous les moments divergents d'ordre  $k > 1/2$

$$\overline{|x(t) - \langle x(t) \rangle|^k} \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} c_k T (T \ln T)^{2k-1} \quad (3.16)$$

Les constantes  $c_k$  en préfacteur peuvent être calculées à partir des propriétés statistiques des évènements rares (a,b,c) décrits ci-dessus (Publication [P4]).

### 3.5 Relation avec la théorie générale des dynamiques lentes et des états métastables

#### 3.5.1 États métastables

Dans la description qualitative usuelle des dynamiques lentes, que ce soit pour les verres, les milieux granulaires ou les systèmes désordonnés, la notion d'état métastable joue un grand rôle. Comme les états métastables au sens strict n'existent que dans les approximations de champ moyen ou dans la limite de température nulle, si on veut utiliser ce concept pour des systèmes en dimension finie à température finie, il faut considérer des états métastables de temps de vie finie [20], en séparant la dynamique en deux échelles de temps : il y a d'une part des degrés de liberté "rapides", qui atteignent vite un quasi-équilibre local, ce qui correspond aux "états métastables", et il y a d'autre part une dynamique lente hors équilibre, qui correspond à l'évolution des états métastables.

Dans ce langage, notre description de la marche aléatoire de Sinai peut être reformulée ainsi :

- Les états métastables à l'instant  $t$  sont les vallées du paysage renormalisé à l'échelle  $\Gamma = T \ln t$  : en effet, les marcheurs qui sont partis à  $t = 0$  d'un point de cette vallée n'ont pas eu le temps d'en sortir à l'instant  $t$ .
- Dans chaque vallée renormalisée, il y a un quasi-équilibre décrit par une distribution de Boltzmann à l'intérieur de la vallée.
- La dynamique lente correspond à l'évolution du paysage renormalisé avec l'échelle  $\Gamma = T \ln t$  : certains états métastables disparaissent et sont absorbés par un voisin.

#### 3.5.2 Observables à un temps et Conjecture d'Edwards

Comme la 'Conjecture d'Edwards', qui propose de calculer les quantités dynamiques par une moyenne plate sur les états métastables, a donné lieu à beaucoup de travaux récents [11, 65], il est intéressant de reconsidérer de ce point de vue notre procédure.

Dans notre approche, toutes les observables à un temps se calculent effectivement par une moyenne sur les vallées renormalisées (qui sont les états métastables), mais avec une mesure qui dépend de l'observable :

- Pour une condition initiale uniforme, la taille du bassin d'attraction d'une vallée est donnée par sa longueur, et donc on utilise une mesure pondérée par la longueur  $\int dl P(l)$  pour calculer la distribution de la position, de l'énergie, etc...
- Pour les observables du paquet thermique, nous avons utilisé une mesure plate sur les vallées Browniennes infinies, car il y a une indépendance entre la taille de la vallée et la statistique du fond de la vallée.

#### 3.5.3 Décomposition du front de diffusion sur les états métastables

Si l'on veut décrire à la fois la dynamique effective des vallées et l'équilibre de Boltzmann dans chaque vallée renormalisée, on peut écrire le front de diffusion dans

un échantillon sous la forme

$$P(xt|x_00) \simeq \sum_{V_\Gamma} \frac{1}{Z_{V_\Gamma}} e^{-\beta U(x)} \theta_{V_\Gamma}(x) \theta_{V_\Gamma}(x_0) \quad (3.17)$$

La somme porte sur toutes les vallées renormalisées  $V_\Gamma$  à l'échelle  $\Gamma = T \ln t$ . La notation  $\theta_V(x)$  désigne la fonction caractéristique de la vallée  $V$ , c'est à dire  $\theta_V(x) = 1$  si  $x$  appartient à la vallée et  $\theta_V(x) = 0$  sinon. Enfin  $Z_V = \int_V dx e^{-\beta U(x)}$  représente la fonction de partition de la vallée  $V$ .

Cette expression du front de diffusion (3.17) correspond tout à fait à la construction générale en présence d'états métastables (cf [20, 160] et les références incluses), dans laquelle l'opérateur d'évolution  $e^{-tH_{FP}}$  est remplacé par un projecteur sur les états  $(i)$  d'énergie  $E_i < 1/t$

$$e^{-tH_{FP}} \sim \sum_i |P_i\rangle\langle Q_i| \quad (3.18)$$

L'interprétation est claire : “everything fast has happened and everything slow has not taken place” [160]. Pour le modèle de Sinai, les expressions explicites sont les suivantes : les états à droite

$$P_i(x) = \frac{e^{-\beta U(x)}}{\int_{V_\Gamma^{(i)}} dy e^{-\beta U(y)}} \theta(x \in V_\Gamma^{(i)}) \quad (3.19)$$

sont bien positifs, normalisés, avec des supports qui ne se recouvrent pas, alors que les états à gauche

$$Q_i(x) = \theta(x \in V_\Gamma^{(i)}) \quad (3.20)$$

sont simplement égaux à 1 sur le support de leur vecteur propre à droite associé, et nuls ailleurs.

Dans le modèle de Sinai, on peut en fait aller au delà de cette description à un temps en terme de projection sur les états métastables, en considérant la dynamique de ces états métastables pour obtenir des informations sur les propriétés spectrales de l'opérateur de Fokker-Planck.

## 3.6 Étude des fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck

### 3.6.1 Construction des fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck associé à la dynamique effective

Il est intéressant de voir comment change l'expression (3.17) lors de la décimation d'une vallée renormalisée, c'est à dire lors de la disparition d'un état métastable. La

décomposition de l'opérateur d'évolution sur les valeurs propres  $E_n \geq 0$  et les fonctions propres à droite  $\Phi_n^R$  et à gauche  $\Phi_n^L$  de l'opérateur de Fokker-Planck  $H_{FP}$  s'écrit

$$P(xt|x_00) = \langle x|e^{-tH_{FP}}|x_0 \rangle = \sum_n e^{-E_n t} \Phi_n^R(x) \Phi_n^L(x_0) \quad (3.21)$$

En dehors de l'état fondamental  $n = 0$  d'énergie nulle  $E_0 = 0$  qui correspond à l'équilibre de Boltzmann sur l'échantillon total

$$\Phi_0^L(x) = 1/\sqrt{Z_{tot}} \quad (3.22)$$

$$\Phi_0^R(x) = e^{-U(x)/T} / \sqrt{Z_{tot}} \quad (3.23)$$

la comparaison avec l'équation (3.17) conduit aux identifications suivantes pour les états excités  $n \geq 1$  : les énergies  $E_n$  sont déterminées par les échelles de renormalisation  $\Gamma_n = T \ln t_n = -T \ln E_n$  qui correspondent aux décimations de barrières. Lors d'une décimation, deux vallées  $V_1$  et  $V_2$  se joignent en une seule nouvelle vallée renormalisée  $V'$ , et les fonctions propres associées s'écrivent

$$\Phi_n^L(x) = \sqrt{\frac{Z_{V_1} Z_{V_2}}{Z_{V_1} + Z_{V_2}}} \left( \frac{1}{Z_{V_1}} \theta_{V_1}(x) - \frac{1}{Z_{V_2}} \theta_{V_2}(x) \right) \quad (3.24)$$

$$\Phi_n^R(x) = e^{-U(x)/T} \Phi_n^L(x) \quad (3.25)$$

On peut vérifier que ces fonctions propres ont toutes les propriétés requises d'orthonormalisation

$$\int dx \Phi_n^L(x) \Phi_m^R(x) = \delta_{n,m} \quad (3.26)$$

et de normalisation de la probabilité totale du paquet thermique

$$\int dx \Phi_n^R(x) = 0 \quad (3.27)$$

Au delà du modèle de Sinai, la structure (3.25) en termes de fonctions de partition partielles semble donc décrire plus généralement les fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck pour les dynamiques lentes dans lesquelles les états métastables disparaissent de manière hiérarchique et emboîtée.

### 3.6.2 Structure spatiale des fonctions propres : 2 pics et 3 échelles de longueur !

Un état propre (3.25) présente deux pics qui correspondent aux minima des vallées  $V_1$  et  $V_2$ . Chacun des deux pics a une largeur finie, qui représente la longueur caractéristique associé poids de Boltzmann à température  $T$  autour du minimum d'une vallée. La distance entre les deux pics est d'ordre  $l(E) \sim \Gamma^2 \sim (\ln E)^2$ . Loin des minima, mais à l'intérieur de la vallée renormalisée  $r \leq \Gamma^2$ , la fonction propre  $\Phi_n^R(x)$  a



une décroissance gouvernée par le poids de Boltzmann  $e^{-\beta U(r)}$  de comportement typique  $e^{-c\sqrt{r}}$ . En particulier au bord de la vallée  $r \sim \Gamma^2$ , l'amplitude typique est d'ordre  $e^{-c'\Gamma}$ . Au delà des deux vallées en jeu, l'approximation simple (3.25) avec des fonctions theta devient insuffisante. Pour estimer la décroissance d'un état propre sur une distance  $r \geq \Gamma^2$ , il faut considérer [139] que les deux points sont séparés par un nombre de vallées renormalisées d'ordre  $\frac{r}{\Gamma^2}$  et que le recouvrement entre deux vallées voisines n'est pas zéro, mais d'ordre  $e^{-c''\Gamma}$ . Une théorie de perturbation conduit alors à une décroissance asymptotique exponentielle en  $e^{-c''\frac{r}{\Gamma}}$ , ce qui correspond en effet à la longueur de localisation  $\lambda(E) \sim \Gamma \sim (-T \ln E)$  calculée exactement par une méthode de type Dyson-Schmidt pour le problème de Schrödinger associé [22].

En conclusion, les propriétés des fonctions propres font donc intervenir trois échelles de longueur qui coexistent :

- une échelle finie  $l \sim 1$  qui caractérise la largeur d'un pic, et qui est reliée à la localisation de Golosov du paquet thermique.
- une échelle  $l(E) \sim (\ln E)^2$  qui représente la distance entre les deux pics et qui est reliée à la distance totale parcourue au temps  $t \sim 1/E$ .
- une échelle  $\lambda(E) \sim (-\ln E)$  qui caractérise la décroissance exponentielle asymptotique de la fonction d'onde, et qui correspond à la longueur de localisation du problème de Schrödinger associé.

### 3.7 Conclusion

Le modèle de Sinai est un exemple parfait de 'point fixe de désordre infini'. La procédure de renormalisation donne une image très complète de la dynamique asymptotique. Elle permet d'obtenir des résultats exacts explicites sur la dynamique effective d'une particule, sur les propriétés de vieillissement, sur les propriétés de localisation du paquet thermique, et sur les événements rares qui gouvernent la largeur thermique. Par ailleurs, la description du modèle de Sinai en termes de vallées renormalisées est un exemple explicite de la théorie générale des états métastables de temps de vie fini, et permet d'obtenir une image très claire de la structure des fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck.

Mentionnons pour terminer que certains résultats obtenus par notre approche de renormalisation de type Ma-Dasgupta ont été depuis confirmés par des études de mathématiciens probabilistes, que ce soit sur le poids de la partie singulière du front de diffusion à deux temps [55] ou sur la statistique des retours à l'origine de la dynamique effective [42].

#### Publications associées

- Principe de la renormalisation et premiers résultats : Publication [P3]
- Dynamique effective, événements rares et vieillissement : Publication [P4]
- Sur la dynamique de l'énergie : Publication [P10]
- Sur la localisation de Golosov et l'opérateur de Fokker-Planck : Publication [P8]

## Chapitre 4

# Marche aléatoire dans un potentiel Brownien biaisé

### 4.1 Présentation du modèle

#### 4.1.1 La phase de diffusion anormale

L'introduction d'une force constante  $F_0$  dans l'équation de Langevin (3.1) du modèle de Sinai discuté au Chapitre précédent est évidemment très naturelle. Ce modèle avec force a même encore plus intéressé les mathématiciens et physiciens depuis longtemps, car il présente une série de transitions de phase dynamiques [114, 57, 22] en fonction du paramètre sans dimension  $\mu = F_0 T / \sigma$ . En particulier, il existe une phase de diffusion anormale  $0 < \mu < 1$  qui est caractérisée par le comportement asymptotique sous-linéaire

$$\overline{\langle x(t) \rangle} \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} t^\mu \quad (4.1)$$

alors que pour  $\mu > 1$ , la vitesse devient finie :  $\overline{\langle x(t) \rangle} \sim V(\mu)t$ .

#### 4.1.2 Le modèle dirigé de pièges

Il a été proposé depuis longtemps un argument heuristique [71, 22] selon lequel le modèle de Sinai biaisé était asymptotiquement équivalent à un modèle dirigé de pièges défini par l'équation maîtresse

$$\frac{dP_t(n)}{dt} = -\frac{P_t(n)}{\tau_n} + \frac{P_t(n-1)}{\tau_{n-1}} \quad (4.2)$$

dans laquelle les  $\tau_n$  sont des variables aléatoires indépendantes distribuées avec une loi algébrique

$$q(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\mu}{\tau^{1+\mu}} \quad (4.3)$$

La phase de diffusion anormale  $0 < \mu < 1$  correspond alors à la phase dans laquelle la moyenne des temps de piégeage est infini.

## 4.2 Principe de la renormalisation

La renormalisation présentée dans le Chapitre 3 pour la marche de Sinai peut être appliquée en présence d'un biais, mais elle ne donne des résultats exacts dans la limite de temps infini  $t \rightarrow \infty$  que si le biais tend vers zéro  $\mu \rightarrow 0$  : par exemple, la renormalisation donne comme front de diffusion une loi exponentielle pour la variable d'échelle  $X = \frac{x(t)}{t^\mu}$  ce qui ne coïncide avec le résultat exact mettant en jeu une loi de Lévy [114, 22] que dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ . Le fait que la dynamique effective ne soit plus exacte lorsque  $\mu$  est fini a pour origine le fait que la distribution des barrières  $F_-$  opposées au biais (2.13) ne devient pas une distribution de largeur infinie par renormalisation, mais qu'elle converge vers une distribution exponentielle de largeur finie proportionnelle à  $1/(2\delta) = T/\mu$ . Ceci montre que la propriété de concentration du paquet thermique tout entier dans la même vallée renormalisée à grand temps, qui est valide dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ , et qui constitue la localisation de Golosov, n'est plus exacte pour  $\mu$  fini. Nous avons donc proposé de généraliser la méthode de renormalisation en incluant un certain étalement du paquet thermique sur plusieurs vallées renormalisées. Nous allons d'abord discuter cette procédure généralisée pour le modèle dirigé de pièges : dans un échantillon donné, la distribution de probabilité d'un marcheur est une somme de distributions  $\delta$  de Dirac, avec la structure hiérarchique décrite dans la légende de la figure (4.1).

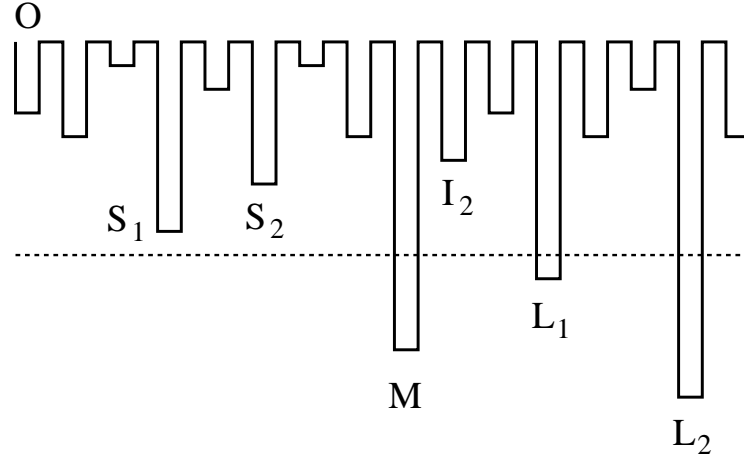


FIG. 4.1 – *Structure des pièges importants pour une particule partie de  $x = 0$  à  $t = 0$  : La ligne pointillée sépare les “petits” pièges (qui ont un temps de piégeage  $\tau_i < t$ ) et les “grand” pièges (qui ont un temps de piégeage  $\tau_i > t$ ). Le premier grand piège noté  $M$  est le piège principal, qui est occupé avec un poids d'ordre  $O(1)$ . Le grand piège suivant  $L_1$  et le plus grand piège  $S_1$  parmi les petits pièges situés avant  $M$  sont les pièges secondaires occupés avec un poids d'ordre  $O(\mu)$ . Le troisième grand piège  $L_2$ , le plus grand piège  $I_2$  parmi les petits pièges situés entre  $M$  et  $L_1$ , et le second plus grand piège  $S_2$  parmi les petits pièges situés avant  $M$  sont les pièges tertiaires occupés avec un poids d'ordre  $O(\mu^2)$ .*

### 4.3 Résultats pour le modèle dirigé de pièges

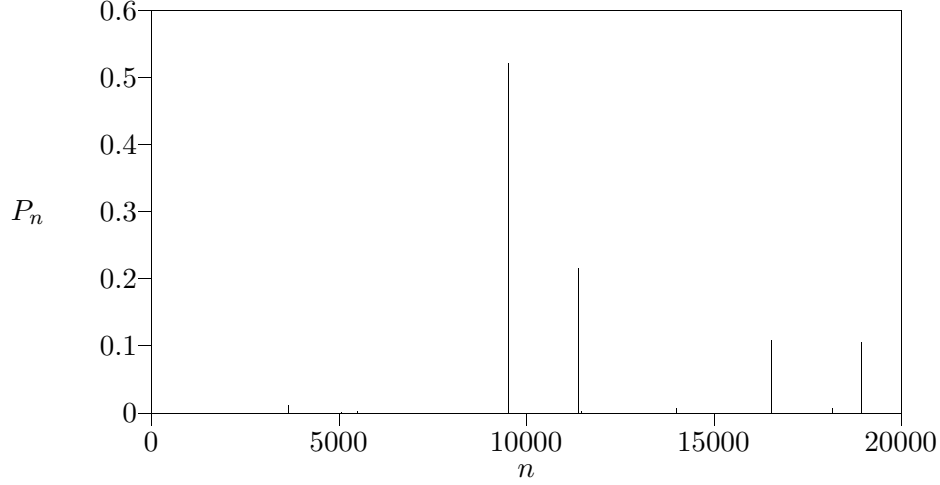


FIG. 4.2 – *Reproduction d’une figure de la référence [43] de A. Compte et J.P. Bouchaud avec sa description : “Distribution of probability after a time  $t = 7 \times 10^{10}$  for a particular sample of disorder in our 1D directed random walk model with  $\mu = 0.4$ . The simulation was done with 1.000 particles in a lattice of 20.000 sites. This probability distribution is made of several sharp peaks that gather a finite fraction of the particles. However, the position of these peaks is scattered on a region of space of width  $t^\mu$ . As time progresses, the position and relative weights of these peaks of course change, but at any given (large) time only a finite number of peaks, corresponding to very large trapping times, contain most of the particles.”*

A partir de cette description du front de diffusion dans chaque échantillon, il est possible de calculer exactement des séries perturbatives en  $\mu$  pour toutes les observables. En particulier, les calculs explicites jusqu’à l’ordre  $\mu^2$  (Publication [P11]) du front de diffusion de la variable d’échelle  $X = \frac{x}{t^\mu}$ , de la largeur thermique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{\langle \Delta n^2(t) \rangle}}{t^{2\mu}} = \mu(2 \ln 2) + \mu^2 \left[ -\frac{\pi^2}{6} + 2 \ln 2 (\ln 2 - 2 + 2\gamma_E) \right] + O(\mu^3) \quad (4.4)$$

et du paramètre de localisation

$$Y_2(\mu) = 1 - \mu(2 \ln 2) + \mu^2 \left( 4 \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) + O(\mu^3) \quad (4.5)$$

coïncident avec les développements des résultats exacts obtenus par d’autres méthodes pour le front de diffusion [114, 22], pour la largeur thermique [6] et pour le paramètre de localisation [43]. Ces comparaisons avec des résultats exacts obtenus par d’autres

méthodes montre que la procédure de renormalisation généralisée est exacte ordre par ordre en  $\mu$ . Plus généralement, pour calculer les observables à l'ordre  $\mu^n$ , il suffit de considérer que le front de diffusion s'étale sur au plus  $(1 + n)$  pièges et de moyenner sur les échantillons avec la mesure appropriée. Et comme nous avons une description du front de diffusion échantillon par échantillon, cette méthode permet de calculer perturbativement toutes les observables que l'on souhaite (Publication [P11]).

Cette approche permet par ailleurs de bien comprendre comment, dans la phase de diffusion anormale  $0 < \mu < 1$ , il y a à la fois une largeur thermique qui croît en  $t^{2\mu}$  (4.4) et une probabilité finie  $Y_2(\mu)$  (4.5) de trouver deux particules au même point à temps infini. Notre description de la répartition du paquet thermique dans un échantillon donné est tout à fait en accord avec les simulations numériques de A. Compte et J.P. Bouchaud [43], dont la figure reproduite ici (4.2) montre que même pour  $\mu = 0.4$ , il n'y a typiquement que quatre pièges qui jouent un rôle important dans un échantillon donné à un instant donné.

#### 4.4 Équivalence quantitative entre le modèle de Sinai biaisé et le modèle dirigé de pièges

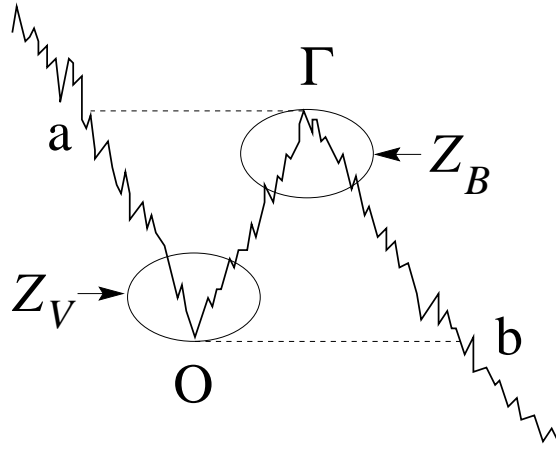


FIG. 4.3 – Calcul du temps de sortie d'une vallée renormalisée de barrière  $\Gamma$  : l'expression exacte du temps de premier passage en  $b$  pour une particule qui part de  $0$  fait intervenir une intégrale double qui est dominée par le facteur d'Arrhénius  $e^{\beta\Gamma}$ , avec un préfacteur qui fait intervenir deux fonctions de partition :  $Z_V$  représente la fonction de partition de la vallée et  $Z_B$  représente la fonction de partition du potentiel ( $-V$ ) autour du sommet de la barrière  $\Gamma$ .

Une analyse par la méthode du col du temps de sortie d'une vallée renormalisée donnée de barrière  $\Gamma$  montre qu'il est distribué selon une loi exponentielle, comme dans le modèle de piège, avec un temps de piège

$$\theta_{\Gamma \rightarrow \infty} \simeq \beta Z_B Z_V e^{\beta\Gamma} \quad (4.6)$$

qui dépend surtout de la barrière  $\Gamma$  à travers de facteur d'Arrhénius usuel  $e^{\beta\Gamma}$ , mais qui dépend aussi des détails de la vallée à travers le préfacteur qui contient deux fonctions de partition de vallées Browniennes indépendantes  $Z_V$  et  $Z_B$  (Figure 4.3).

La distribution du temps de piège  $\tau_V$  sur l'ensemble des vallées du paysage renormalisé à l'échelle  $\Gamma$  peut être calculée à partir de la distribution des barrières et du préfacteur : on retrouve alors la même expression que dans le paysage renormalisé du modèle dirigé de piège

$$q_t(\tau) = \theta(t < \tau) \frac{\mu}{\tau} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\mu \quad (4.7)$$

à condition de choisir l'échelle de renormalisation  $\Gamma$  du paysage de Sinai en fonction du temps selon

$$\Gamma(t) = T \ln \left[ t \sigma^2 \beta^3 \left( \Gamma^2 (1 + \mu) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right] \quad (4.8)$$

L'échelle de longueur associée

$$b(t) = \frac{\Gamma^2(\mu)}{\sigma \beta^2} [t \sigma^2 \beta^3]^\mu \quad (4.9)$$

correspond alors exactement à la constante du front de diffusion qui a été calculée récemment par les mathématiciens probabilistes [93].

Finalemt, notre approche établit que le modèle de Sinai biaisé et le modèle dirigé de pièges sont asymptotiquement équivalents du point de vue de leurs descriptions renormalisées à grande échelle, à une échelle de longueur près que nous avons déterminée.

## 4.5 Résultats pour le modèle de Sinai biaisé

Tous les résultats du modèle dirigé de pièges peuvent donc être traduits pour le modèle de Sinai biaisé, en remplaçant les pièges ponctuels par des vallées renormalisées. Le front de diffusion dans un échantillon fixé a une structure hiérarchique analogue, représentée par la Figure 4.4 qui est l'équivalent de la figure 4.1. Dans les résultats quantitatifs, il suffit de remplacer la variable d'échelle  $X = \frac{n}{t^\mu}$  par la variable d'échelle  $X = \frac{x(t)}{b(t)}$  adaptée au modèle de Sinai avec biais (4.9). En particulier, la largeur thermique admet le développement suivant

$$\frac{\overline{\langle \Delta x^2(t) \rangle}}{t^{2\mu}} = \frac{(\sigma^2 \beta^3)^{2\mu}}{\sigma^2 \beta^4} \left[ \frac{(2 \ln 2)}{\mu^3} + \left[ -\frac{\pi^2}{6} + 2 \ln 2 (\ln 2 - 2 - 2\gamma_E) \right] \frac{1}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right] \quad (4.10)$$

Et si on traduit le résultat exact obtenu pour le modèle dirigé de pièges [6], on obtient même le résultat suivant pour toute la phase  $0 < \mu < 1$  de diffusion anormale

$$\frac{\overline{\langle \Delta x^2(t) \rangle}}{t^{2\mu}} = \frac{(\sigma^2 \beta^3)^{2\mu}}{\sigma^2 \beta^4} \frac{\Gamma^4(\mu)}{\Gamma(2\mu)} \left( \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \right)^3 I(\mu) \quad (4.11)$$

en termes de l'intégrale [6]

$$I(\mu) = \int_0^1 dz \frac{(1+z)z^\mu(1-z)^{2\mu}}{z^{2\mu+2} + 2 \cos \pi \mu z^{\mu+1} + 1} \quad (4.12)$$

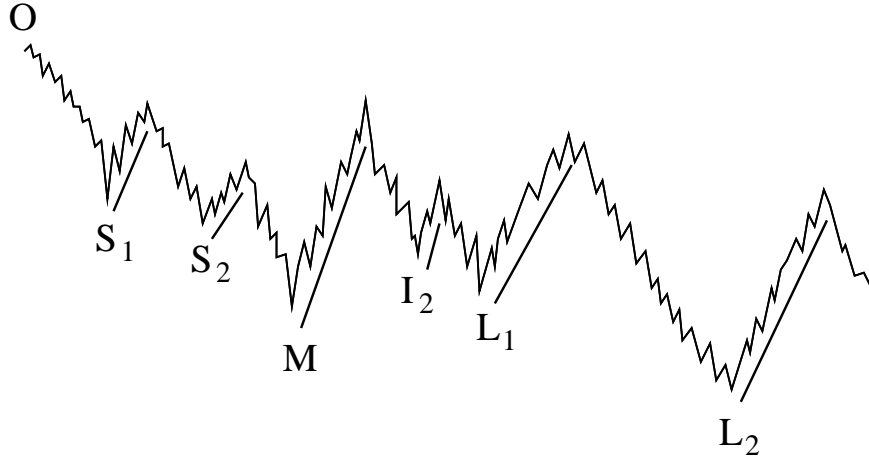


FIG. 4.4 – *Structure hiérarchique des vallées importantes pour une particule partant de l'origine. Les barrières opposées au biais, qui sont soulignées par des lignes droites, correspondent aux profondeurs du modèle de pièges de la Figure 4.1. Le fond M de la vallée renormalisée qui contient l'origine à l'échelle  $\Gamma$  est avec une probabilité d'ordre  $O(1)$ . Le fond  $L_1$  de la vallée renormalisée suivante et le fond  $S_1$  de la plus grande sous-vallée avant M sont occupés avec des poids d'ordre  $O(\mu)$ . Le fond  $L_2$  de la deuxième vallée renormalisée après M, la plus grande sous-vallée  $I_2$  entre M et  $L_1$ , et la seconde plus grande sous-vallée  $S_2$  avant M sont occupés avec des probabilités d'ordre  $O(\mu^2)$ .*

## 4.6 Conclusion

La phase de diffusion anormale  $x \sim t^\mu$  avec  $0 < \mu < 1$  dans le modèle de Sinai biaisé est caractérisée par une localisation sur plusieurs vallées renormalisées, dont les positions et les poids peuvent être caractérisés dans chaque échantillon. La procédure de renormalisation généralisée permet de calculer toutes les observables souhaitées par un développement perturbatif exact en  $\mu$ .

Du point de vue des méthodes de renormalisation de type Ma-Dasgupta, cette étude montre que la procédure usuelle qui est exacte lorsque le désordre évolue vers un point fixe de désordre infini, est une approximation qui garde un grand intérêt lorsque le point fixe est caractérisé par un désordre fini assez grand : la procédure usuelle constitue alors l'ordre dominant d'un développement perturbatif systématique.

Publication associée [P11]

## Chapitre 5

# Chaînes de spin classiques désordonnées

### 5.1 Présentation des modèles

L'équilibre thermodynamique des chaînes de spins classiques désordonnées peut être formulé comme un produit de matrices de transfert  $2 \times 2$  aléatoires. En particulier, l'énergie libre par spin correspond à l'exposant de Lyapunov et peut donc être étudiée par la méthode de Dyson-Schmidt : le livre de J.M. Luck [123] expose les nombreux résultats obtenus dans ce cadre. Dans ce chapitre, nous allons étudier l'équilibre et la dynamique de ces modèles, en termes des domaines Imry-Ma.

#### 5.1.1 La chaîne d'Ising en champ aléatoire

La chaîne d'Ising en champ aléatoire a pour Hamiltonien

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{n=N-1} S_i S_{i+1} - \sum_{i=1}^{i=N} h_i S_i \quad (5.1)$$

Les champs  $\{h_i\}$  sont des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle  $\overline{h_i} = 0$  (cf la publication [P7] pour le cas d'une moyenne non-nulle) et de variance

$$g \equiv \overline{h_i^2} \quad (5.2)$$

D'après l'argument de Imry-Ma [107], l'état fondamental à température nulle est désordonné : il y a une alternance de domaines de spins (+) et de domaines de spins (−), la taille typique d'un domaine étant la longueur de Imry-Ma

$$L_{IM} \approx \frac{4J^2}{g} \quad (5.3)$$

L'argument de Imry-Ma est le suivant [107] : la création d'un domaine de taille  $L$  coûte une énergie  $4J$  (création de deux parois), qui est indépendante de  $L$ , mais elle permet de



gagner une énergie typique  $|2 \sum_{i=x}^{x+L} h_i|_{\text{typ}} \sim 2\sqrt{gL}$ . En conséquence, pour  $L > L_{IM}$ , il devient énergétiquement favorable de créer un domaine pour profiter d'une fluctuation favorable des champs aléatoires.

### 5.1.2 La chaîne verre de spin en champ magnétique extérieur

L'Hamiltonien du verre de spin en champ magnétique s'écrit

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^{i=N-1} J_i \sigma_i \sigma_{i+1} - \sum_{i=1}^N h \sigma_i \quad (5.4)$$

où les couplages  $\{J_i\}$  sont des variables aléatoires indépendantes. Dans le cas particulier  $J_i = \pm J$  avec probabilité  $(1/2, 1/2)$ , il existe une équivalence avec la chaîne en champ aléatoire (5.1) avec  $h_i = \pm h$  :

- On pose  $J_i = J\epsilon_i$  avec  $\epsilon_i = \pm 1$
- On effectue une transformation de jauge des spins  $\sigma_i = \epsilon_1 \dots \epsilon_{i-1} S_i$
- On pose  $h_i = h\epsilon_1 \dots \epsilon_{i-1}$

L'interprétation physique de cette correspondance entre les deux modèles est la suivante :

- En champ nul  $h = 0$ , les deux états fondamentaux du verre de spin  $\pm \sigma_i^{(0)}$ , avec  $\sigma_i^{(0)} = \pm \epsilon_1 \dots \epsilon_{i-1}$ , correspondent aux états ferromagnétiques de la chaîne d'Ising pure  $S_i^{(0)} = +1$  et  $S_i^{(0)} = -1$ .
- En présence de  $h > 0$ , l'état fondamental est une succession des deux fondamentaux de champ nul de taille typique  $L_{IM} = \frac{4J^2}{h^2}$ .
- Les parois de domaines de la chaîne en champ aléatoire représentent les liens frustrés  $J_i \sigma_i \sigma_{i+1} = JS_i S_{i+1} < 0$  du verres de spin.

Dans la suite, nous ne décrivons donc les résultats que dans le langage de chaîne en champ aléatoire, car il est immédiat de les traduire pour la chaîne verre de spin en champ extérieur

## 5.2 Principe de la renormalisation

### 5.2.1 Hamiltonien pour les parois de domaines

L'Hamiltonien (5.1) pour les spins correspond à l'Hamiltonien suivant pour les parois de domaines  $A_\alpha(+|-)$  et  $B_\alpha(-|+)$  dans l'ordre  $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots$  :

$$\mathcal{H} = 2J(N_A + N_B) + \sum_{\alpha=1}^{N_A} V(a_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{N_B} V(b_\alpha) \quad (5.5)$$

en terme du potentiel de Sinai

$$V(x) = -2 \sum_{i=1}^x h_i \quad (5.6)$$

En conséquence :

- Chaque paroi (A ou B) coûte une énergie  $2J$
- Les parois  $A_\alpha(+|-)$  voient le potentiel  $V(x)$
- Les parois  $B_\alpha(-|+)$  voient le potentiel opposé  $(-V(x))$

### 5.2.2 Dynamique de croissances de domaines

On s'intéresse à la dynamique de Glauber à partir d'une configuration initiale aléatoire : le taux de transition est  $W(S_j \rightarrow -S_j) = \frac{e^{-\beta\Delta E}}{e^{\beta\Delta E} + e^{-\beta\Delta E}}$  avec

$$\begin{aligned}\Delta E\{\text{création de 2 parois}\} &= 4J \pm 2h_j \\ \Delta E\{\text{diffusion d'une paroi}\} &= \pm 2h_j \\ \Delta E\{\text{annihilation de 2 parois}\} &= -4J \pm 2h_j\end{aligned}\tag{5.7}$$

Dans le régime  $\{h_i\} \sim T \ll J$  qui va nous intéresser dans toute la suite de ce chapitre, la croissance de domaines depuis  $l \sim 1$  jusqu'à  $L_{IM} \gg 1$  est décrite par le modèle suivant de Réaction-diffusion dans le potentiel de Sinai

- Les parois A diffusent vers les minima
- Les parois B diffusent vers les maxima
- Annihilation lors des rencontre  $A + B \rightarrow \emptyset$

On peut de plus montrer (Publication [P7]) qu'à grand temps, tous les maxima et minima sont occupés par des parois, comme sur la Figure (5.1), ce qui simplifie l'analyse du processus de réaction-diffusion par la renormalisation du paysage.

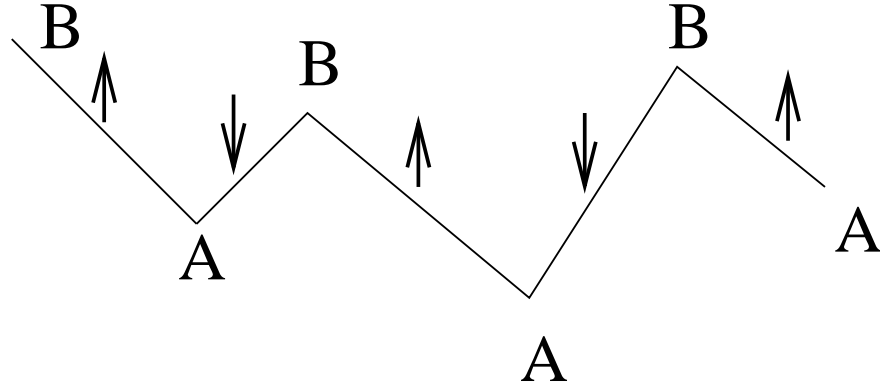


FIG. 5.1 – La ligne en zig-zag représente la renormalisation du potentiel de Sinai (5.6) vu par les parois (5.5). Les parois de domaines de type  $A(+|-)$  occupent les minima, alors que les parois de domaines de type  $B(-|+)$  occupent les maxima. Les descentes contiennent donc des spins  $(+)$ , alors que les montées contiennent des spins  $(-)$ .

### 5.2.3 Équilibre

Le processus de réaction-diffusion décrivant la croissance de domaines s'arrête à l'échelle de renormalisation

$$\Gamma_{eq} = T \ln t_{eq} = 4J\tag{5.8}$$

lorsqu'on atteint l'équilibre avec la création de paires de domaines.

## 5.3 Résultats

### 5.3.1 Densité de parois

La densité de parois décroît selon  $n(t) = \frac{4g}{(T \ln t)^2}$  jusqu'à l'équilibre  $n_{eq} = 1/L_{IM}$ .

### 5.3.2 Distribution des longueurs des domaines

Ce sont des variables indépendantes (ce qui n'est pas vrai pour le cas pur [63]), distribuées selon la loi

$$P^*(\lambda) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) (-1)^n e^{-\pi^2 \lambda (n + \frac{1}{2})^2} \quad (5.9)$$

avec la variable d'échelle  $\lambda = \frac{2gl}{(T \ln t)^2}$  au cours de la croissance de domaines, et  $\lambda = \frac{l}{2L_{IM}}$  à l'équilibre.

### 5.3.3 Fonction de corrélation spatiale

$$\overline{\langle S_0(t) S_x(t) \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{48 + 64(2n+1)^2 \pi^2 g \frac{|x|}{\Gamma^2}}{(2n+1)^4 \pi^4} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 2g \frac{|x|}{\Gamma^2}} \quad (5.10)$$

avec  $\Gamma = (T \ln t)$  au cours de la croissance de domaines, et  $\Gamma_{eq} = 4J$  à l'équilibre.

### 5.3.4 Fonction de corrélation temporelle

La fonction d'autocorrélation d'un spin décroît selon

$$\overline{\langle S_i(t) S_i(t') \rangle} = \frac{4}{3} \left( \frac{\ln t'}{\ln t} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\ln t'}{\ln t} \right)^2 \quad (5.11)$$

ce qui correspond à un exposant d'autocorrélation à grand temps  $\lambda = 1/2$ .

### 5.3.5 Exposants de persistance

- La probabilité qu'un spin ne se retourne pas dans  $[0, t]$  a une décroissance  $\left(\frac{1}{(T \ln t)^2}\right)^\theta$  avec  $\theta = 1$ .
- La probabilité que la valeur moyenne thermique  $\langle S_i(t) \rangle$  ne change pas de signe dans  $[0, t]$  décroît selon :  $\left(\frac{1}{(T \ln t)^2}\right)^{\bar{\theta}}$  avec  $\bar{\theta} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ .
- La probabilité qu'un domaine initial n'ait pas disparu à l'instant  $t$  décroît selon :  $\left(\frac{1}{(T \ln t)^2}\right)^\psi$  avec  $\psi = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ . (De manière générale, on a l'inégalité  $\psi \leq \bar{\theta}$ ).

### 5.3.6 Violation du théorème de fluctuation-dissipation

#### 5.3.6.1 Rapport $X$ pour mesurer le caractère “hors équilibre”

Le paramètre  $X$  de violation du théorème de Fluctuation-Dissipation est défini par [47]

$$T R(t, t_w) = X(t, t_w) \partial_{t_w} C(t, t_w) \quad (5.12)$$

où  $C(t, t_w)$  représente la fonction de corrélation thermique tronquée

$$C(t, t_w) = \sum_x \overline{\langle S_0(t) S_x(t_w) \rangle} - \overline{\langle S_0(t) \rangle} \overline{\langle S_x(t_w) \rangle} \quad (5.13)$$

et où  $R(t, t_w)$  représente la fonction de réponse linéaire lorsqu'on applique un champ uniforme  $H$  à partir de  $t_w$

$$\overline{\langle S_0(t) \rangle} = H \int_{t_w}^t du R(t, u) \quad (5.14)$$

Pour la chaîne en champ aléatoire, on trouve trois régimes

(i) un quasi-équilibre des parois dans les vallées

$$X(t, t_w) = 1 \quad \text{pour } 0 < \frac{\ln(t - t_w)}{\ln t_w} < 1 \quad (5.15)$$

(ii) un rapport  $X$  non trivial lorsque la dynamique effective des vallées repart

$$X(t, t_w) = \frac{t + t_w}{t} \quad \text{pour } \frac{t - t_w}{t_w} \text{ fixé} \quad (5.16)$$

(iii) un régime final de vieillissement

$$X(t, t_w) = \frac{t}{t_w \ln t_w} \left( 1 + \frac{24}{7} \frac{\ln^2 t_w}{\ln^2 t} \right) \text{ pour } \frac{\ln t}{\ln t_w} > 1 \quad (5.17)$$

En particulier,  $X$  croit vers  $+\infty$ , car les corrélations thermiques tronquées sont très faibles par rapport à la réponse à un champ.

#### 5.3.6.2 Comparaison avec les modèles de champ moyen

Ici, le rapport  $X$  n'est pas une fonction de la corrélation  $C(t, t_w)$  : c'est à cause des deux échelles  $(t, t_w)$  et  $(\ln t, \ln t_w)$ .

D'autre part, en champ moyen le rapport  $X$  appartient à l'intervalle  $[0, 1]$  et s'interprète comme l'inverse d'une température effective  $X = 1/T_{eff}$  [48].

Ici, on trouve  $T_{eff} \rightarrow 0$ , ce que l'on peut interpréter comme un point fixe de température nulle.

### 5.3.6.3 Comparaison avec la croissance dans les ferromagnétiques purs

Il est intéressant de comparer avec ce qui est connu sur le régime de croissance dans les ferromagnétiques purs :

- Au point critique  $T = T_c$ , il existe un rapport  $X(\frac{t}{t_w})$  non-trivial qui correspond à un rapport d'amplitude [83] Par exemple, pour la chaîne d'Ising pure unidimensionnelle à température nulle  $T_c = 0$ , le rapport d'amplitude [83] vaut  $X(t, t_w) = \frac{t+t_w}{2t}$  : il décroît de  $X(t = t_w, t_w) = 1$  à  $X(t \rightarrow \infty, t_w) = \frac{1}{2}$ .

- Pour  $T < T_c$ , le rapport  $X$  est nul  $X = 0$  [10, 16], ce qui est interprété de la manière suivante : les parois répondent par un facteur  $O(1)$  mais elles n'occupent qu'une fraction  $1/L(t_w)$  du volume.

Par comparaison, on voit que pour la chaîne en champ aléatoire, seule une petite fraction  $1/\Gamma_w$  des parois répondent, mais avec une réponse très grande, qui correspond au renversement de tout un domaine d'ordre  $\Gamma_w^2$ .

## 5.4 Conclusion

La formulation des chaînes de spins classiques désordonnées en termes de parois de domaines qui voient un potentiel de Sinai, permet d'étudier à la fois les propriétés d'équilibre thermodynamique et la dynamique de croissances de domaines à partir d'une condition initiale aléatoire. La possibilité d'obtenir des résultats exacts vient de la très forte localisation des parois de domaines par le désordre.

### Publications associées :

- Principe de la renormalisation et premiers résultats : Publication [P3]
- Étude détaillée : Publication [P7]
- Étude de processus de réaction-diffusion plus généraux dans un potentiel de Sinai : Publication [P5].

## Chapitre 6

# Localisation d'un polymère aléatoire à une interface

### 6.1 Présentation du modèle

Ce chapitre est consacré à un modèle introduit par Garel, Huse, Leibler et Orland [81] : un hétéropolymère constitué de monomères de charges  $q_i$  aléatoires, est en présence d'une interface située en  $z = 0$  qui sépare un milieu  $z > 0$  favorable aux charges positives  $q > 0$  et un milieu  $z < 0$  favorable aux charges négatives  $q < 0$ . Plus précisément, la version continue de ce modèle est définie par la fonction de partition suivante sur les trajectoires Browniennes  $\{z(s)\}$  [81]

$$Z_L(\beta; \{q(s)\}) = \int \mathcal{D}z(s) \exp \left( -\frac{1}{2D} \int_0^L ds \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 + \beta \int_0^L ds q(s) \text{sgn}(z(s)) \right) \quad (6.1)$$

A haute température, des arguments de type Imry-Ma ont été proposés [81] pour le cas symétrique  $\overline{q_i} = 0$  et pour le cas biaisé  $\overline{q_i} > 0$  : ce sont des arguments énergie/entropie, à la différence des arguments usuels d'Imry-Ma qui sont de type énergie/énergie.

#### 6.1.1 Argument de type Imry-Ma pour le cas symétrique

L'argument de type Imry-Ma pour le cas symétrique [81] est le suivant. On suppose que la chaîne est localisée autour de l'interface, avec des boucles de longueur typique  $l$  dans chaque solvant :

- L'énergie typique gagnée par boucle est d'ordre  $\sum_i^{i+l} q_i \sim \sqrt{\sigma l}$
  - La perte d'entropie pour une boucle est d'ordre  $(\ln l)$
- L'optimisation de l'énergie libre par monomère

$$f(l) \sim -\sqrt{\frac{\sigma}{l}} + T \frac{\ln l}{l} \quad (6.2)$$

par rapport à la longueur  $l$  conduit à

$$\frac{l}{(\ln l)^2} \sim \frac{T^2}{\sigma} \quad . \quad (6.3)$$

Cet argument prédit donc une localisation du polymère symétrique à toute température, avec les comportements d'échelle suivants pour la longueur typique d'une boucle et l'énergie libre

$$l(T) \sim \frac{T^2 (\ln T)^2}{\sigma} \quad (6.4)$$

$$f(T) \sim -\frac{\sigma}{T \ln T} \quad (6.5)$$

### 6.1.2 Argument de type Imry-Ma pour le cas dissymétrique

L'argument de type Imry-Ma pour le cas dissymétrique [81] est en fait beaucoup plus subtil que dans le cas symétrique, parce que la description correcte des boucles dans le solvant  $(-)$  nécessite la considération des "événements rares" où la somme de  $l_-$  variables aléatoires  $q_i$ , de moyenne positive  $\bar{q}_i = q_0 > 0$ , se trouve être assez négative pour rendre favorable une excursion dans le solvant  $(-)$ . Plus précisément, l'argument proposé [81] est le suivant : on s'attend à ce que le polymère soit dans le solvant préféré  $(+)$ , sauf lorsqu'une boucle de longueur  $l^-$  dans le solvant  $(-)$  devient favorable énergétiquement, avec une charge  $Q_- = -\sum_{i=j}^{j+l^-} q_i > 0$  suffisante. Comme la probabilité d'avoir  $\sum_{i=j}^{j+l^-} q_i = -Q_-$

$$\text{Prob}(Q_-) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma l^-}} e^{-\frac{(Q_- + q_0 l^-)^2}{4\sigma l^-}} \quad (6.6)$$

est faible, la distance typique  $l^+$  entre deux tels événements se comporte comme l'inverse de cette probabilité

$$l^+ \sim e^{\frac{(Q_- + q_0 l^-)^2}{4\sigma l^-}} \quad . \quad (6.7)$$

Cet argument probabiliste de type 'événement rare', qui est inhabituel dans les arguments de type Imry-Ma qui concernent les événements typiques, donne que l'énergie gagnée  $Q_-$  dans une boucle du solvant  $(-)$  se comporte en

$$Q_- \sim \sqrt{4\sigma l^- \ln l^+} - q_0 l^- \quad , \quad (6.8)$$

alors que la perte d'entropie associée est d'ordre  $(\ln l^+)$ . La différence d'énergie libre par monomère entre cet état localisé avec des boucles  $(l_+, l_-)$  par rapport à l'état délocalisé dans le solvant préféré  $(+)$  est d'ordre

$$f(T, l^+, l^-) - f_{deloc}(T) \sim \frac{1}{l^+} (-Q_- + T \ln l^+) \sim \frac{1}{l^+} (q_0 l^- - \sqrt{4\sigma l^- \ln l^+} + T \ln l^+) \quad (6.9)$$

L'optimisation par rapport à la longueur  $l^-$  donne

$$l^- \sim \frac{\sigma}{q_0^2} \ln l^+ \quad (6.10)$$

et donc finalement

$$Q^- \sim \frac{\sigma}{q_0} \ln l^+ \quad (6.11)$$

Ainsi, cet argument prédit qu'à la fois l'énergie gagnée  $Q^-$  et le coût en entropie ont la même dépendance en  $(\ln l^+)$  : la différence d'énergie libre se factorise selon

$$f(T, l^+) - f_{deloc}(T) \sim (T - T_c) \frac{\ln l_+}{l_+} \quad (6.12)$$

Cet argument conduit donc finalement à une transition à la température critique

$$T_c \sim \frac{\sigma}{q_0} \quad (6.13)$$

entre la phase localisée  $T < T_c$  et la phase délocalisée  $T > T_c$ . Contrairement au cas symétrique, les comportements de l'énergie libre et de la longueur  $l_+$  par rapport à la température ne sont pas déterminés par l'argument. L'objet de la renormalisation de type Ma-Dasgupta va être justement de trouver ces comportements en construisant explicitement les boucles d'Imry-Ma du polymère autour de l'interface en fonction de la réalisation du désordre.

## 6.2 Principe de la renormalisation

### 6.2.1 Construction de la structure optimale en boucles

À température nulle  $T = 0$ , chaque monomère veut être dans son solvant préféré  $\text{sgn}(z_i) = \text{sgn}(q_i)$  : le polymère est décomposé en boucles  $\alpha$  contenant  $l_\alpha$  monomères consécutifs de même signe, et portant une certaine charge absolue  $Q_\alpha$ . Lorsque la température  $T$  croît, on considère les configurations de la chaîne qui peuvent être obtenues à partir de la structure de l'état fondamental en transférant dans le solvant opposé les boucles de plus petite charge absolue  $Q_{min} \equiv \Gamma$  de manière itérative. Quand on transfère une boucle  $(Q_2 = \Gamma, l_2)$  qui est entourée de deux boucles  $(Q_1, l_1)$  et  $(Q_3, l_3)$ , on obtient une nouvelle boucle de charge absolue  $Q$  et de longueur  $l$  données par les règles (cf Figure 6.1)

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_3 - Q_2 \\ l &= l_1 + l_2 + l_3 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ces règles correspondent aux règles de renormalisation des extrema Browniens décrites dans le Chapitre 2 : ici la marche aléatoire correspondante est la somme des charges  $\sum_0^i q_j$  en fonction du monomère final  $i$ , et la procédure de renormalisation



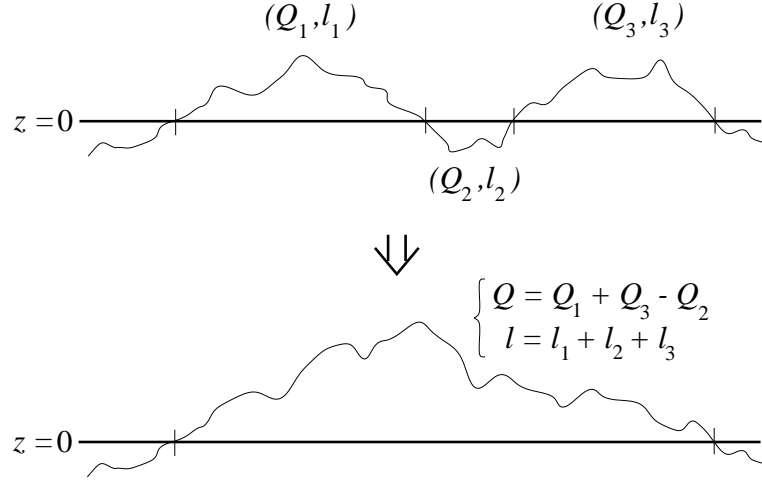


FIG. 6.1 – Illustration de la procédure de renormalisation dans l'espace réel : le transfert d'une boucle  $(Q_2 = \Gamma, l_2)$  entourée par les boucles voisines  $(Q_1, l_1)$  et  $(Q_3, l_3)$  donne naissance à une nouvelle boucle  $(Q, l)$  avec les règles de renormalisation (6.15).

construit la meilleure structure en boucles avec la contrainte qu'on n'autorise que les boucles de charge absolue plus grande que  $\Gamma$ .

Pour établir la correspondance entre l'échelle de renormalisation  $\Gamma$  et la température  $T$ , il reste à étudier dans quelles conditions le transfert d'une boucle  $(Q_2, l_2)$  dans le solvant opposé est effectivement favorable pour l'énergie libre : le coût en énergie est

$$\Delta E^{flip} = 2Q_2 \quad (6.15)$$

alors que le gain en entropie est

$$\Delta S^{flip} = \ln(\mathcal{M}(l_1 + l_2 + l_3)) - \ln[\mathcal{M}(l_1)\mathcal{M}(l_2)\mathcal{M}(l_3)] \quad (6.16)$$

où  $\mathcal{M}(l) = c^l / l^{3/2}$  représente le nombre de marches aléatoires de  $l$  pas qui vont de  $z = 0$  à  $z = 0$  en présence d'une frontière absorbante en  $z = 0^-$ , ce qui conduit au bilan d'énergie libre

$$\Delta F^{flip} = \Delta E^{flip} - T\Delta S^{flip} = 2Q_2 - T \ln \left( \frac{\mathcal{M}(l_1 + l_2 + l_3)}{\mathcal{M}(l_1)\mathcal{M}(l_2)\mathcal{M}(l_3)} \right) \quad (6.17)$$

Pour obtenir la structure optimale à température  $T$ , il faut donc poursuivre la renormalisation tant qu'elle permet d'abaisser l'énergie libre ( $\Delta F^{flip} < 0$ ), et il faut s'arrêter à la première itération qui conduirait à une augmentation ( $\Delta F^{flip} > 0$ ). On définit  $\Gamma_{eq}(T)$  comme l'échelle de renormalisation  $\Gamma$  où il faut arrêter la renormalisation.

### 6.2.2 Validité de la méthode

La méthode de renormalisation est justifiée si l'échelle de renormalisation  $\Gamma_{eq}(T)$  est grande, ce qui correspond à la région des hautes températures.

## 6.3 Résultats pour le cas symétrique

### 6.3.1 Énergie libre

L' énergie libre trouvée

$$f(T) \sim -\frac{\sigma}{T \ln T} \quad (6.18)$$

est en accord avec l'argument de Imry-Ma (6.5).

### 6.3.2 Distribution des longueurs de boucles

Les longueurs de boucles sont des variables aléatoires indépendantes, et la variable d'échelle

$$\lambda = \frac{\sigma l}{9T^2(\ln T)^2} \quad (6.19)$$

est distribuée avec la loi

$$P(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi (-1)^n e^{-\pi^2 \lambda (n + \frac{1}{2})^2} \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\simeq} \pi e^{-\frac{\pi^2}{4} \lambda} \quad (6.20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{3/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (m + \frac{1}{2}) e^{-\frac{1}{\lambda} (m + \frac{1}{2})^2} \underset{\lambda \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{3/2}} e^{-\frac{1}{4\lambda}} \quad (6.21)$$

### 6.3.3 Densité de polymère autour de l'interface

La variable d'échelle pour la distance  $z$  à l'interface

$$Z = \sqrt{\frac{2\sigma}{D}} \frac{z}{3T(\ln T)} \quad (6.22)$$

est distribuée avec la loi

$$R(Z) = 4 \int_0^{\infty} d\lambda P(\lambda) \sqrt{\lambda} \int_{\frac{Z}{\sqrt{\lambda}}}^{\infty} du e^{-u^2} \underset{Z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{8}{\pi} \sqrt{2Z} e^{-\pi Z} \quad (6.23)$$

### 6.3.4 Température de délocalisation d'une chaîne finie

Alors qu'une chaîne infinie reste localisée à toute température, une chaîne finie de taille  $L$  a une dissymétrie d'ordre  $\sqrt{L}$  pour sa charge totale et subit donc une délocalisation à une température finie. Pour caractériser ces effets de taille finie, on peut calculer la distribution de la température de délocalisation  $T_{\text{deloc}}$  sur l'ensemble des chaînes cycliques de taille finie grande  $L$  : la variable d'échelle

$$g = \frac{3}{\sqrt{\sigma L}} T_{\text{deloc}} \ln T_{\text{deloc}} \quad (6.24)$$

a pour distribution

$$D(g) = \frac{\pi^2}{g^3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4g^2}} \underset{g \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\pi^2}{g^3} e^{-\frac{\pi^2}{4g^2}} \quad (6.25)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [2(2m+1)^2 g^2 - 1] e^{-(2m+1)^2 g^2} \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{4}{\sqrt{\pi}} g^2 e^{-g^2} \quad (6.26)$$

## 6.4 Résultats pour le cas dissymétrique

### 6.4.1 Température critique

Dans le cas dissymétrique ( $q_0 > 0$ ), dans la limite  $\sigma \gg q_0$ , la température critique obtenue par renormalisation

$$T_c = \frac{4\sigma}{3q_0} \quad (6.27)$$

est dans le domaine des hautes températures, et donc dans le domaine de validité de la méthode.

### 6.4.2 Singularité essentielle de l'énergie libre

La renormalisation conduit à la singularité essentielle suivante pour l'énergie libre

$$f(T) - f(T_c) \underset{T \rightarrow T_c^-}{\simeq} -2q_0 \left( \ln \frac{4\sigma}{q_0} \right) \exp \left[ -\frac{\ln \frac{4\sigma}{q_0}}{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} \right] \quad (6.28)$$

ce qui correspond donc à une transition d'ordre infinie.

### 6.4.3 Propriétés des boucles dans les deux solvants

La longueur typique  $l_{\text{blob}}^+(T)$  des boucles dans le solvant préféré diverge avec une singularité essentielle à la transition, alors que la longueur typique  $l_{\text{blob}}^-(T)$  des boucles

dans le solvant défavorable diverge algébriquement

$$l_{blob}^+(T) \underset{T \rightarrow T_c^-}{\simeq} \frac{\sigma}{q_0^2} \exp \left[ + \frac{\ln \frac{4\sigma}{q_0}}{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} \right] \quad (6.29)$$

$$l_{blob}^-(T) \underset{T \rightarrow T_c^-}{\simeq} \frac{\sigma}{q_0^2} \frac{\ln \frac{4\sigma}{q_0}}{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} \quad (6.30)$$

La variable d'échelle  $\lambda_+ = l_+/l_{blob}^+(T)$  pour les boucles dans le solvant préféré est distribuée avec la distribution exponentielle  $e^{-\lambda_+}$ .

#### 6.4.4 Densité de polymère autour de l'interface

La variable d'échelle pour la distance  $z$  à l'interface dans le solvant (+)

$$Z = \frac{z}{\sqrt{\frac{D}{2}} \frac{\sigma}{q_0} \exp \left[ + \frac{\ln \frac{4\sigma}{q_0}}{2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} \right]} \quad (6.31)$$

a pour distribution

$$R^+(Z) = 4 \int_0^\infty du e^{-u^2} \int_{\frac{z}{u}}^\infty dv v^2 e^{-v^2} \underset{Z \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\pi Z} e^{-2Z} \quad (6.32)$$

#### 6.4.5 Température de délocalisation d'une chaîne finie

Pour caractériser les effets de taille finie, on peut calculer la distribution de la température de délocalisation  $T_{\text{deloc}}$  sur l'ensemble des chaînes cycliques de taille  $L$  : la variable aléatoire

$$r = \frac{\sigma}{q_0^2 L} \left( \frac{4\sigma}{q_0^2} \right)^{\frac{T_{\text{deloc}}}{T_c - T_{\text{deloc}}}} \quad (6.33)$$

est distribuée selon la loi

$$D^+(r) = \frac{1}{r^2} e^{-\frac{1}{r}} \quad . \quad (6.34)$$

En particulier, la valeur typique pour la température de délocalisation d'une chaîne de taille  $L$  présente une correction logarithmique d'ordre  $(1/\ln L)$  par rapport à la température critique  $T_c$  de la limite thermodynamique

$$T_{\text{deloc}}^{\text{typ}} \sim T_c \left( 1 - \frac{4\sigma}{q_0^2 \ln L} \right) \quad (6.35)$$

## **6.5 Conclusion**

La renormalisation de type Ma-Dasgupta permet d'étudier la localisation d'un hétéropolymère aléatoire autour d'une interface à haute température, en construisant explicitement la succession des boucles dans chaque échantillon. Ces boucles sont des domaines d'Imry-Ma généralisés de type énergie/entropie. Dans le cas dissymétrique, la compétition entre les énergies aléatoires gagnées dans les boucles et les entropies perdues lors des retours à l'interface conduit à une transition de délocalisation caractérisée par des singularités essentielles.

**Publication associée [P6]**

## Chapitre 7

# Potentiel Brownien en présence d'un confinement quadratique

### 7.1 Présentation du modèle

Le potentiel aléatoire unidimensionnel

$$U_{toy}(x) = \frac{\mu}{2}x^2 + V(x) \quad (7.1)$$

contenant un terme quadratique déterministe et un terme aléatoire Brownien  $V(x)$

$$\overline{(V(x) - V(y))^2} = 2|x - y| \quad (7.2)$$

a été introduit par Villain *et al.* comme un ‘modèle jouet’ pour les interfaces en présence de champ aléatoire [163]. Par ailleurs, dans le cadre de l’étude des variétés de dimension interne  $D$  plongées dans un milieu aléatoire de dimension  $(N + D)$ , il est considéré comme le cas extrême le plus simple  $D = 0$  et  $N = 1$  [134].

Ce modèle simple permet en effet de mieux comprendre certaines propriétés de systèmes désordonnés plus compliqués.

#### 7.1.1 Argument de Imry-Ma

A cause du confinement quadratique, le minimum absolu du potentiel est fini et un argument de Imry-Ma, entre l’énergie élastique d’ordre  $\mu x^2$  et l’énergie aléatoire d’ordre  $\sqrt{x}$ , permet de déterminer son ordre de grandeur

$$x_{min} \sim \mu^{-2/3} \quad (7.3)$$

alors que les méthodes usuelles de perturbation à tous les ordres [164] ou d’itération [165] n’arrivent pas du tout à reproduire ce scaling (7.3). Dans le cadre de la méthode variationnelle des répliques, le résultat (7.3) nécessite une brisure de symétrie des répliques [134, 70].

### 7.1.2 Symétrie statistique de ‘tilt’

Ce modèle présente aussi une symétrie statistique de ‘tilt’ ( ‘statistical tilt symmetry’ en anglais) comme les autres modèles en champs aléatoires, qui implique des identités remarquables [154] pour les moyennes thermiques des cumulants thermiques de la position, que l’on peut résumer par [154]

$$\overline{\ln \langle e^{-\lambda x} \rangle} = T \frac{\lambda^2}{2\mu} \quad (7.4)$$

Cette identité sur la fonction génératrice montre que le second cumulant est simplement

$$\overline{\langle x^2 \rangle} - \overline{\langle x \rangle^2} = \frac{T}{\mu} \quad (7.5)$$

et que toutes les moyennes sur le désordre des cumulants supérieurs s’annulent ! Dans le régime de basse température, le résultat (7.5) implique que les fluctuations thermiques sont reliées à la présence d’états métastables dans des échantillons rares [154]. La renormalisation permet en particulier d’étudier quantitativement ce phénomène.

## 7.2 Principe de la renormalisation

Pour un potentiel aléatoire  $U(x)$  ‘Markovien’, satisfaisant une équation de Langevin locale de type

$$\frac{dU(x)}{dx} = F[U(x), x] + \eta(x) \quad (7.6)$$

où  $\eta(x)$  est un bruit blanc Gaussien, la mesure du paysage renormalisé se factorise en blocs qui satisfont des équations de renormalisation fermées (Publication [P9]). Pour le cas de paysages stationnaires, où la force  $F$  est indépendante de  $x$

$$F[U, x] = F[U] = -\frac{dW[U]}{dU} \quad (7.7)$$

(ce qui généralise le paysage Brownien pur  $F = 0$  et le paysage Brownien biaisé  $F[U] = F > 0$ ), et pour le modèle (7.1) qui correspond à une force indépendante de  $U$  et linéaire en  $x$

$$F[U(x), x] = F[x] = \mu x \quad (7.8)$$

on obtient des solutions explicites pour la renormalisation (Publication [P9]).

En particulier, pour le modèle (7.1) qui nous intéresse dans ce chapitre, la mesure du paysage renormalisé s’exprime en terme des fonctions d’Airy.

## 7.3 Résultats sur la statistique des minima

### 7.3.1 Position du minimum

A température nulle, la particule se trouve au minimum  $x_{min}$  du potentiel. L'état final  $\Gamma = \infty$  de la renormalisation permet de retrouver que la distribution de  $x_{min}$  sur l'ensemble des échantillons est, en accord avec [88, 80]

$$P_{]-\infty, +\infty[}(x) = g(x)g(-x) \quad (7.9)$$

et la fonction auxiliaire

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{e^{-i\lambda x}}{a Ai(bi\lambda)} \quad (7.10)$$

en utilisant les notations  $a = (\mu/2)^{1/3}$  et  $b = 1/a^2$ ,

### 7.3.2 Échantillons avec deux minima presque dégénérés

La probabilité qu'un échantillon présente deux minima presque dégénérés avec une différence d'énergies  $\Delta E = \epsilon \rightarrow 0$  situés en  $x_1$  et  $x_2$  s'écrit

$$\mathcal{D}(\epsilon, x_1, x_2) = \epsilon g(-x_1) d(x_2 - x_1) g(x_2) + O(\epsilon^2) \quad (7.11)$$

en termes de la fonction  $g$  (7.10) et de la fonction

$$d(y) = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda y} \frac{Ai'(ib\lambda)}{Ai(ib\lambda)} \quad (7.12)$$

La probabilité d'avoir deux minima séparés par une distance  $y > 0$  est donc

$$D(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{D}(\epsilon, x_1, x_1 + y)}{\epsilon} \right) = bd(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{e^{-i\lambda y}}{Ai^2(ib\lambda)} \quad (7.13)$$

En particulier, le calcul du second moment donne

$$\int_0^{+\infty} dy y^2 D(y) = \frac{1}{\mu} \quad (7.14)$$

### 7.3.3 Contribution au second cumulant à basse température

La contribution des échantillons avec deux minima dégénérés au second cumulant thermique de la position (7.5) peut être estimé à l'ordre  $T$  en température comme suit : les deux minima ont pour poids de Boltzmann respectifs  $p = \frac{1}{1+e^{-\beta\epsilon}}$  and  $(1-p) = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}}$ . La variable  $(x- < x >)$  est donc  $(1-p)(x_1 - x_2)$  avec probabilité  $p$  et  $p(x_2 - x_1)$  avec probabilité  $1-p$ , et donc après moyenne on obtient

$$\overline{< (x- < x >)^2 >} = \overline{p(1-p)(x_1 - x_2)^2} \quad (7.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \mathcal{D}'(\epsilon = 0, x_1, x_2) \frac{e^{-\epsilon/T}}{(1 + e^{-\epsilon/T})^2} (x_2 - x_1)^2 \quad (7.16)$$

$$= T \int_0^{+\infty} dy D(y) y^2 \quad (7.17)$$



En utilisant (7.14), on obtient alors exactement le résultat exact (7.5). Ceci montre que les fluctuations thermiques à basse température viennent entièrement des états métastables qui existent dans quelques échantillons rares. En particulier, la susceptibilité

$$\chi \equiv \frac{1}{T} (< x^2 > - < x >^2) \quad (7.18)$$

a une moyenne finie à température nulle

$$\bar{\chi} = \frac{1}{\mu} \quad (7.19)$$

mais seuls les échantillons avec deux minima dégénérés contribuent à cette valeur moyenne, car les échantillons typiques avec un seul minimum ont une susceptibilité qui s'annule à température nulle.

#### 7.3.4 Contribution aux moments thermiques à basse température

De même, les moments pairs de la position relative ( $x - < x >$ ) se comportent de la manière suivante à basse température

$$\overline{< (x - < x >)^{2n} >} = \frac{T}{n} \int_0^{+\infty} y^{2n} D(y) dy + O(T^2) \quad (7.20)$$

en terme de la fonction  $D(y)$  définie en (7.13). La comparaison avec l'identité (7.4) montre qu'il y a beaucoup de termes qui se compensent dans les moyennes sur le désordre des cumulants.

### 7.4 Résultats sur la statistique de la plus grande barrière

Le temps  $t_{eq}$  nécessaire pour atteindre l'équilibre est directement relié à la plus grande barrière  $\Gamma_{max} = T \ln t_{eq}$  qui existe dans l'échantillon. Plus précisément, la probabilité  $\mathcal{P}(t_{eq} < t)$  que le système ait déjà atteint l'équilibre à l'instant  $t$ , correspond à la probabilité qu'il ne reste plus qu'une vallée renormalisée à l'échelle  $\Gamma = T \ln t$  : c'est une fonction de la variable d'échelle  $\gamma$

$$\mathcal{P}(t_{eq} < t) = \Phi \left( \gamma \equiv \left( \frac{\mu}{2} \right)^{1/3} T \ln t \right) \quad (7.21)$$

qui a pour expression explicite en termes des fonctions d'Airy

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{1}{Ai^2(i\lambda)} e^{-2 \int_0^{+\infty} df \tilde{\psi}_\gamma(f, \lambda)} \\ \tilde{\psi}_\gamma(f, \lambda) &= \frac{Ai(f + \gamma + i\lambda)}{\pi Ai(f + i\lambda) [Ai(f + i\lambda) Bi(f + \gamma + i\lambda) - Bi(f + i\lambda) Ai(f + \gamma + i\lambda)]} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Ce résultat correspond directement par dérivation à la distribution de probabilité de la variable réduite  $\gamma = (\frac{\mu}{2})^{1/3} \Gamma_{max}$  de la plus grande barrière  $\Gamma_{max}$  de l'échantillon

$$P_{max}(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \Phi(\gamma) \quad (7.23)$$

Les comportements asymptotiques de cette distribution sont les suivants

$$P_{max}(\gamma) \underset{\gamma \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{9}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \gamma^{5/4} e^{-\frac{3}{2} \gamma^{3/2}} \quad (7.24)$$

$$P_{max}(\gamma) \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} \frac{6\zeta(3)}{\gamma^4} e^{-2\frac{\zeta(3)}{\gamma^3}} \quad (7.25)$$

où  $\zeta(n)$  désigne la fonction zeta de Riemann.

## 7.5 Conclusion

Pour le potentiel Brownien avec confinement quadratique, la solution explicite du paysage renormalisé en termes de fonctions d'Airy permet d'étudier la statistique des minima et des barrières. En particulier, ceci permet de montrer que les fluctuations thermiques à basse température sont entièrement gouvernés par les échantillons rares qui possèdent deux minima dégénérés.

**Publication associée [P9]**



## Chapitre 8

# Le modèle de pièges unidimensionnel

### 8.1 Présentation des modèles de pièges

Les modèles de pièges proposent un mécanisme très simple de vieillissement [23] : une particule effectue une dynamique stochastique dans un paysage contenant des pièges d'énergies aléatoires de distribution exponentielle

$$\rho(E) = \theta(E) \frac{1}{T_g} e^{-\frac{E}{T_g}} \quad (8.1)$$

Ce choix de distribution exponentielle est justifié par les états de basse énergie du REM [56], la théorie des répliques [133], et plus généralement par la queue exponentielle de la distribution de Gumbel qui représente une classe d'universalité importante dans la statistique des extrêmes. Cette distribution exponentielle des énergies (8.1) correspond pour le temps de piégeage d'Arrhénius  $\tau = e^{\beta E}$  à la loi algébrique

$$q(\tau) = \theta(\tau > 1) \frac{\mu}{\tau^{1+\mu}} \quad (8.2)$$

avec l'exposant

$$\mu = \frac{T}{T_g} \quad (8.3)$$

A basse température  $T < T_g$ , le temps moyen de piégeage  $\int d\tau \tau q(\tau)$  diverge, ce qui conduit immédiatement à des effets de vieillissement.

Les propriétés de vieillissement ont été beaucoup étudiées, soit dans la version de champ moyen [23, 13, 72, 110], soit dans la version unidimensionnelle [79, 17], qui apparaît naturellement dans divers contextes physiques [4, 22, 96], et qui présente deux échelles de temps caractéristiques pour le vieillissement. L'objet de ce chapitre est de comprendre ce phénomène grâce à une renormalisation appropriée.

## 8.2 Principe de la renormalisation

Nous avons déjà décrit la renormalisation adaptée au modèle *dirigé* de pièges, dans le Chapitre 4. Ici, dans le modèle *non-dirigé*, chaque site peut être visité un grand nombre de fois, ce qui conduit à un changement essentiel : un piège du paysage renormalisé va être caractérisé par deux temps importants, à savoir

(i) son temps de piégeage  $\tau_i$ , qui représente le temps typique de sortie vers ses voisins immédiats

(ii) son temps d'évasion  $T_i$ , qui représente le temps nécessaire pour arriver dans un piège plus profond.

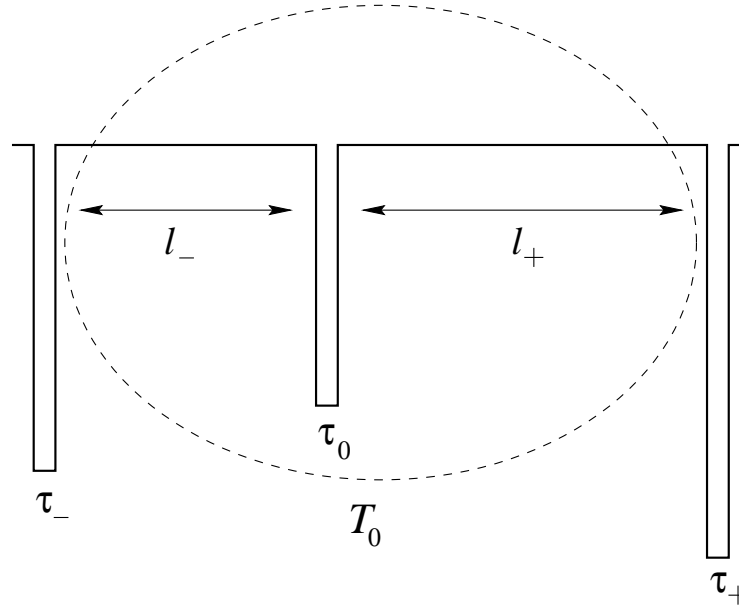


FIG. 8.1 – Définition du temps d'évasion dans le paysage renormalisé : le piège de temps de piégeage  $\tau_0$  est entouré par deux pièges, le piège  $\tau_+$  à la distance  $l_+$  et le piège  $\tau_-$  à la distance  $l_-$ . Le temps d'évasion  $T_0$  est le temps caractéristique nécessaire pour atteindre  $\tau_+$  ou  $\tau_-$  quand on part de  $\tau_0$ .

Plus précisément, le paysage renormalisé à l'échelle  $R$  est défini comme suit : tous les pièges  $\tau_i < R$  sont remplacés par un paysage 'plat', alors tous les pièges  $\tau_i > R$  sont inchangés. Dans le paysage renormalisé (cf Figure 8.1), quand la particule quitte le piège  $\tau_0$ , elle s'échappe vers la droite ou vers la gauche avec probabilité  $1/2$ . Si elle s'échappe vers la gauche, elle va arriver à atteindre le piège suivant  $\tau_-$  avec probabilité  $1/l_-$ . Si elle s'échappe vers la droite, elle va arriver à atteindre le piège suivant  $\tau_+$  avec probabilité  $1/l_+$ . Sinon, elle va être réabsorbée par le piège  $\tau_0$ . Asymptotiquement, le nombre de retours dans le piège  $\tau_0$  avant l'évasion va donc être grand, d'ordre  $R^\mu$ . On peut montrer que le temps passé à l'intérieur de  $\tau_0$  pendant ces multiples visites est dominant par rapport au temps passé dans les multiples excursions infructueuses et dans l'excursion réussie pour s'échapper. Finalement, on obtient que le temps d'évasion

$t_{esc}$  du piège  $\tau_0$  a une distribution exponentielle

$$P(t_{esc}) \underset{R \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{T_0} e^{-\frac{t_{esc}}{T_0}} \quad (8.4)$$

avec le temps caractéristique

$$T_0 = \frac{2}{\frac{1}{l_+} + \frac{1}{l_-}} \tau_0 \quad (8.5)$$

ce qui explique pourquoi il y a deux échelles de temps importantes. En particulier, pour décrire la dynamique au temps  $t$ , on souhaite garder les pièges de temps d'évasion  $T > t$  dont la particule n'a pas eu le temps de s'échapper, et éliminer au contraire les pièges de temps d'évasion  $T < t$ , ce qui conduit au choix suivant pour l'échelle de renormalisation  $R(t)$  du paysage en fonction de temps

$$R(t) \simeq t^{\frac{1}{1+\mu}} \quad (8.6)$$

De plus, dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ , la dynamique effective suivante devient exacte : à l'instant  $t$ , la particule partie de l'origine se trouve soit sur le premier piège renormalisé  $M_+$  à distance  $l_+$  sur la droite, soit sur le premier piège renormalisé  $M_-$  à distance  $l_-$  sur la gauche. Le poids de  $M_+$  est simplement la probabilité  $l_-/(l_+ + l_-)$  d'avoir atteint  $M_+$  avant  $M_-$

$$P_{eff}(x, t) \sim \frac{l_+}{l_+ + l_-} \delta(x + l_-) + \frac{l_-}{l_+ + l_-} \delta(x - l_+) \quad (8.7)$$

## 8.3 Résultats

### 8.3.1 Distance entre pièges dans le paysage renormalisé

Les distances entre pièges successifs dans le paysage renormalisé sont des variables aléatoires indépendantes et la variable réduite  $\lambda = l/\xi(t)$  est distribuée selon la loi exponentielle

$$P(\lambda) = e^{-\lambda} \quad (8.8)$$

L'échelle de longueur caractéristique du paysage renormalisé à l'instant  $t$  est

$$\xi(t) = \xi_0(\mu) t^{\frac{\mu}{1+\mu}} \quad (8.9)$$

avec le préfacteur

$$\xi_0(\mu) = 1 + O(\mu) \quad (8.10)$$

### 8.3.2 Forme d'échelle du front de diffusion

Dans la variable d'échelle  $X = x/\xi(t)$ , la moyenne sur les échantillons du front de diffusion (8.7) est

$$g_\mu(X) = e^{-|X|} \int_0^{+\infty} du e^{-u} \frac{u}{|X| + u} + O(\mu) \quad (8.11)$$

### 8.3.3 Paramètres de localisation

Les paramètres de localisation, qui représentent les moyennes sur les échantillons des probabilités que  $k$  particules indépendantes se trouvent au même site, sont donnés par

$$Y_k(\mu) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} P^k(n, t|0, 0)} = \frac{2}{(k+1)} + O(\mu) \quad (8.12)$$

ce qui est en accord avec les simulations numériques de Bertin et Bouchaud [17] qui ont obtenu  $Y_2 \rightarrow 2/3$  et  $Y_3 \rightarrow 1/2$  dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ .

### 8.3.4 Fonction génératrice des cumulants thermiques

La largeur thermique est

$$c_2(\mu) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}}{\xi^2(t)} = 1 + O(\mu) \quad (8.13)$$

et plus généralement, les autres cumulants thermiques peuvent être dérivés de la fonction génératrice

$$Z_\mu(s) \equiv \overline{\ln \langle e^{-s \frac{n}{\xi(t)}} \rangle} = \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\lambda} \lambda \left( \frac{s\lambda}{2} \coth \frac{s\lambda}{2} - 1 \right) + O(\mu) \quad (8.14)$$

### 8.3.5 Fonction de corrélation à deux particules

La fonction de corrélation à deux particules prend la forme

$$C(l, t) \equiv \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} P(n, t|0, 0) P(m, t|0, 0) \delta_{l, |n-m|}} \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} Y_2(\mu) \delta_{l,0} + \frac{1}{\xi(t)} \mathcal{C}_\mu \left( \frac{l}{\xi(t)} \right)$$

Le poids de la fonction  $\delta$  à l'origine correspond comme il se doit au paramètre de localisation  $Y_2 = 2/3 + O(\mu)$  (8.12), alors que la seconde partie est une fonction d'échelle de la variable  $\lambda = \frac{l}{\xi(t)}$  qui a pour expression

$$\mathcal{C}_\mu(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda}{3} + O(\mu) \quad (8.15)$$

### 8.3.6 Les deux fonctions de corrélations temporelles

La probabilité  $\Pi(t + t_w, t_w)$  de ne pas sauter pendant l'intervalle de temps  $[t_w, t_w + t]$  a une forme d'échelle de 'sous-vieillessement'

$$\Pi(t + t_w, t_w) = \tilde{\Pi}_\mu \left( g = \frac{t}{R(t_w)} \right) = \tilde{\Pi}_\mu \left( g = [\tilde{T}_0(\mu)]^{\frac{1}{1+\mu}} \frac{t}{t_w^{\frac{1}{1+\mu}}} \right) \quad (8.16)$$

avec

$$\tilde{\Pi}_\mu^{(0)}(g) = \int_0^1 dz \mu z^{\mu-1} e^{-zg} \quad (8.17)$$

En particulier, on obtient le comportement asymptotique

$$\Pi(t + t_w, t_w) \underset{\frac{t}{t_w^{\frac{1}{1+\mu}}} \rightarrow +\infty}{\simeq} \left( \frac{t}{t_w^{\frac{1}{1+\mu}}} \right)^{-\mu} [\mu + O(\mu^2)] \quad (8.18)$$

La probabilité  $C(t + t_w, t_w)$  d'être au temps  $(t + t_w)$  dans le piège occupé à l'instant  $t_w$  a une forme d'échelle de vieillissement

$$C(t + t_w, t_w) = \tilde{C}_\mu \left( h = \frac{t}{R^{1+\mu}(t_w)} \right) = \tilde{C}_\mu \left( h = \tilde{T}_0(\mu) \frac{t}{t_w} \right) \quad (8.19)$$

avec

$$\tilde{C}_\mu^{(0)}(h) = \tilde{C}_\mu(h) = \frac{2\mu}{(2h)^\mu} \int_0^{\sqrt{2h}} dz z^{1+2\mu} K_1^2(z) \quad (8.20)$$

En particulier, on obtient le comportement asymptotique

$$C(t + t_w, t_w) \underset{\frac{t}{t_w} \rightarrow \infty}{\simeq} \left( \frac{t}{t_w} \right)^{-\mu} [\mu + O(\mu^2)] \quad (8.21)$$

Dans cette approche de renormalisation, la présence de deux échelles de temps différentes dans les propriétés de vieillissement vient directement de la présence d'un temps d'évasion différent du temps de piégeage. Comme en dimension  $d = 2$  une marche aléatoire est encore récurrente, on s'attend là aussi à avoir deux échelles de temps, alors que pour  $d > 2$ , il n'y a plus de récurrence, et la seule échelle de temps pour le vieillissement est l'échelle des temps de piégeages. Il est donc intéressant de discuter le cas  $d = 2$ .

## 8.4 Analyse de scaling pour le modèle de pièges en $d = 2$

### 8.4.1 Paysage renormalisé

On définit encore le paysage renormalisé à l'échelle  $R$  en ne gardant que les pièges de temps de piégeage  $\tau_i > R$ . Étant donné un piège, la distance  $l$  au plus proche voisin



a pour distribution

$$P_R(l) \underset{R \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{2\pi l}{R^\mu} e^{-\frac{\pi l^2}{R^\mu}} \quad (8.22)$$

En utilisant le fait que la probabilité de s'échapper jusqu'à une distance  $l$  sans être revenu à l'origine se comporte en  $c/(\ln l)$ , on obtient que le nombre  $n$  de retours avant une évasion réussie se comporte en  $n \sim \ln l \sim \ln R^{\frac{\mu}{2}}$ . Finalement, le temps d'évasion d'un piège  $\tau_0$  du paysage renormalisé est de la forme

$$T_0 = a\tau_0 \ln R^{\frac{\mu}{2}} \quad (8.23)$$

où  $a$  est une variable aléatoire d'ordre 1 qui caractérise la géométrie des pièges voisins de  $\tau_0$ . L'échelle de renormalisation  $R$  doit donc être choisie en fonction du temps selon

$$t \sim R(t) \ln R^{\frac{\mu}{2}}(t) \quad (8.24)$$

ce qui donne par inversion à l'ordre dominant

$$R(t) \sim \frac{t}{\ln t^{\frac{\mu}{2}}} \quad (8.25)$$

#### 8.4.2 Deux échelles de temps

La présence de deux échelles de temps distinctes  $R(t)$  et  $t$  va conduire à deux comportements de vieillissement : on s'attend à ce que la corrélation  $\Pi(t + t_w, t_w)$  soit une fonction de  $t/R(t_w)$  avec (8.25) et à ce que la corrélation  $C(t + t_w, t_w)$  soit une fonction de  $t/t_w$ , ce qui est en accord avec les résultats rigoureux [12, 13].

#### 8.4.3 Deux échelles de longueur

La grande nouveauté qualitative par rapport au cas  $d = 1$  est qu'il existe deux échelles de longueur en  $d = 2$ .

##### 8.4.3.1 Distance entre deux pièges renormalisés

La distance caractéristique entre deux pièges voisins du paysage renormalisé est

$$\xi(t) \sim [R(t)]^{\frac{\mu}{2}} \sim \left[ \frac{t}{\ln t^\mu} \right]^{\frac{\mu}{2}} \quad (8.26)$$

##### 8.4.3.2 Distance parcourue à l'instant $t$

Par ailleurs, l'analyse de scaling à partir des sommes de Lévy [21] en  $d = 2$  est la suivante : après  $N$  pas, le nombre de sites distincts visités croît selon  $S = N/(\ln N)$  et chaque site a été visité typiquement  $(\ln N)$  fois, ce qui conduit à la correspondance

$$t \sim \sum_{i=1}^S \tau_i(\ln N) \sim (\ln N) \left( \frac{N}{\ln N} \right)^{\frac{1}{\mu}} \quad (8.27)$$

Comme la distance typique après  $N$  pas est  $r \sim \sqrt{N}$ , on obtient finalement le comportement en temps de la distance parcourue

$$r(t) \sim t^{\frac{\mu}{2}} (\ln t^\mu)^{\frac{1-\mu}{2}} \quad (8.28)$$

#### 8.4.3.3 Nombre de pièges importants à l'instant $t$

En  $d = 2$ , la présence des deux échelles de longueur différentes  $\xi(t)$  (8.26) et  $r(t)$  (8.28) et  $\xi(t)$  (8.26) montre que le nombre  $n(t)$  de pièges renormalisés contenus dans le disque de rayon  $r(t)$  accessible, ne reste pas fini mais croît logarithmiquement en temps

$$n(t) \sim \frac{r^2(t)}{\xi^2(t)} \sim \ln t^\mu \quad (8.29)$$

ce qui est en accord avec le résultat rigoureux concernant l'absence de localisation en  $d = 2$  à temps infini  $t \rightarrow \infty$  [13]. Cependant, dans le régime  $t \rightarrow \infty$  et  $\mu \rightarrow 0$  avec  $t^\mu$  fixé (8.29), on s'attend à ce que le front de diffusion dans un échantillon soit une somme de pics  $\delta$  dont les poids dépendent de la répartition géométrique des pièges mais pas de leurs énergies. Il serait bien sûr intéressant d'arriver à définir une dynamique effective plus précise pour décrire ce régime, à partir d'une construction explicite des probabilités d'absorption des différents pièges pour une configuration aléatoire fixée.

## 8.5 Conclusion

La renormalisation appropriée pour décrire la phase de vieillissement  $\mu < 1$  du modèle de pièges unidimensionnel est basée sur deux échelles de temps, le temps de piégeage et le temps d'évasion, qui gouvernent deux fonctions de corrélations temporelles différentes. À l'ordre dominant en  $\mu \rightarrow 0$ , dans un échantillon donné, le front de diffusion est localisé seulement sur deux sites, qui correspondent aux deux pièges renormalisés les plus proches de l'origine à l'échelle de renormalisation  $R(t)$ . Les poids des pièges sont simplement donnés par les probabilités respectives d'atteindre un piège avant l'autre. Ceci montre que la dynamique reste toujours hors équilibre : les poids des deux pièges ne sont pas donnés par des facteurs de Boltzmann, ils ne dépendent même pas des énergies des pièges, mais seulement des distances à l'origine.

**Publication associée [P12]**



## Chapitre 9

# Le modèle de pièges en champ : réponses linéaire et non-linéaire

### 9.1 Présentation du modèle

En présence d'un champ extérieur  $f$ , l'équation maîtresse du modèle de pièges s'écrit [22]

$$\frac{dP_t^{(f)}(n)}{dt} = P_t^{(f)}(n+1)\frac{e^{-\beta\frac{f}{2}}}{2\tau_{n+1}} + P_t^{(f)}(n-1)\frac{e^{+\beta\frac{f}{2}}}{2\tau_{n-1}} - P_t^{(f)}(n)\frac{e^{+\beta\frac{f}{2}} + e^{-\beta\frac{f}{2}}}{2\tau_n} \quad (9.1)$$

dans laquelle les taux de transition satisfont la condition de bilan détaillé

$$e^{-\beta U(n)} W_{\{n \rightarrow n+1\}}^{(f)} = e^{-\beta U_{n+1}} W_{\{n+1 \rightarrow n\}}^{(f)} \quad (9.2)$$

en terme de l' énergie totale  $U_n$  contenant l' énergie aléatoire ( $-E_n$ ) du piège et l' énergie potentielle linéaire ( $-fn$ ) associée au champ extérieur  $f$

$$U_n = -E_n - fn \quad (9.3)$$

La réponse de ce modèle a été étudiée par E. Bertin et J.P. Bouchaud [18] avec des arguments de scaling et des simulations numériques. Leur résultat principal est le suivant : le Théorème Fluctuation-Dissipation du régime de réponse linéaire est valable même dans le secteur de vieillissement, mais la réponse devient non-linéaire asymptotiquement. Le but du présent chapitre est de comprendre ces propriétés, en utilisant d'une part une symétrie particulière de l'équation maîtresse, et d'autre part en généralisant la renormalisation du chapitre précédent pour prendre en compte la présence d'un champ extérieur.

### 9.2 Une symétrie dynamique qui empêche la violation du théorème Fluctuation-Dissipation

Dans cette section, les équations seront écrites pour le cas  $d = 1$  pour simplifier les notations, mais il est clair que les résultats peuvent être généralisés immédiatement à

toute dimension finie  $d$ .

### 9.2.1 Loi de conservation dans chaque échantillon pour le modèle sans champ

Le modèle de pièges a une propriété très spéciale [18] : en l'absence de champ extérieur  $f = 0$  la moyenne thermique de la position

$$\langle n \rangle_{f=0}(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n P_t^{(f=0)}(n) \quad (9.4)$$

est une quantité conservée dans tout échantillon ! Cela vient du fait qu'en sortant d'un piège la particule saute avec des probabilités égales ( $1/2, 1/2$ ) vers la droite ou vers la gauche. Cette propriété de conservation est d'autant plus remarquable que le désordre brise la symétrie  $n \rightarrow -n$  dans chaque échantillon.

### 9.2.2 Un théorème de fluctuation non-linéaire pour $t_w = 0$

Dans un échantillon donné, si on compare les fronts de diffusion en présence de  $(+f)$  et de  $(-f)$ , on obtient la relation très simple

$$\frac{P_t^{(+f)}(n)}{P_t^{(-f)}(n)} = e^{\beta f n} \quad (9.5)$$

ce qui permet d'exprimer la différence des moyennes thermiques de la position

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{+f}(t) - \langle n \rangle_{-f}(t) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \left[ P_t^{(+f)}(n) - P_t^{(-f)}(n) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n (1 - e^{-\beta f n}) P_t^{(+f)}(n) \end{aligned} \quad (9.6)$$

#### 9.2.2.1 Relation de Fluctuation-Dissipation dans le régime linéaire

La première conséquence (9.6) est que la relation d'Einstein

$$\langle n \rangle_f(t) \underset{f \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\beta f}{2} \langle n^2 \rangle_{f=0}(t) \quad (9.7)$$

est valable pour  $t$  fixé dans la limite  $f \rightarrow 0$ .

#### 9.2.2.2 Fin du régime de réponse linéaire

La deuxième conséquence de (9.6) est que pour  $f$  fixé, le régime de réponse linéaire n'est valable que s'il est légitime de linéariser le facteur  $(1 - e^{-\beta f n})$  ce qui donne comme critère

$$\beta f \xi_{(f=0)}(t) \ll 1 \quad (9.8)$$

où  $\xi_{(f=0)}(t)$  est le déplacement typique sans champ à l'instant  $t$ . Le régime de réponse linéaire est donc limité par un temps caractéristique associé à la force  $f$

$$t \ll t_\mu(f) \equiv \left( \frac{1}{\beta f} \right)^{\frac{1+\mu}{\mu}} \quad (9.9)$$

### 9.2.2.3 Propriété du front de diffusion

Une troisième conséquence de (9.6) concerne la dissymétrie de la moyenne sur les échantillons du front de diffusion (Publication [P13])

$$\overline{P_t^{(f)}(-n)} = e^{-\beta f n} \overline{P_t^{(f)}(n)} \quad (9.10)$$

### 9.2.3 Un théorème de fluctuation non-linéaire pour $t_w$ quelconque

Les résultats précédents peuvent être généralisés au cas où le système évolue d'abord sans champ extérieur  $f = 0$  pendant l'intervalle  $[0, t_w]$ , avant d'être soumis au champ  $f$  pour  $t \geq t_w$ . On introduit le front de diffusion à deux temps  $P^{(f;t_w)}(n, t; n_w, t_w | 0, 0)$  qui représente la probabilité jointe d'être en  $n_w$  à  $t_w$  et en  $n$  à  $t$  (on suppose  $t > t_w$ ).

La généralisation de (9.5)

$$\frac{P^{(+f;t_w)}(n, t; n_w, t_w | 0, 0)}{P^{(-f;t_w)}(n, t; n_w, t_w | 0, 0)} = e^{\beta f(n - n_w)} \quad (9.11)$$

permet d'obtenir les trois conséquences suivantes.

#### 9.2.3.1 Régime linéaire pour $(t, t_w)$ fixés

Pour des temps  $(t, t_w)$  fixés, la relation d'Einstein est valide sous la forme

$$\langle (n - n_w) \rangle_{f, t_w}(t) \underset{f \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\beta f}{2} \langle (n - n_w)^2 \rangle_{f=0}(t) \quad (9.12)$$

#### 9.2.3.2 Fin du régime de réponse linéaire

Pour un temps  $t_w$  fixé et un champ extérieur  $f$  fixé, la validité du régime linéaire est limitée aux temps  $t$  tels que

$$\beta f \xi_{f=0}(t, t_w) \ll 1 \quad (9.13)$$

où  $\xi_{f=0}(t, t_w)$  représente le déplacement caractéristique entre  $t_w$  et  $t$  en l'absence de champ, et donc finalement

$$t - t_w \ll t_\mu(f) \quad (9.14)$$

ce qui généralise (9.9).

### 9.2.3.3 Front de diffusion à deux temps

L'asymétrie induite par  $f$  sur du front diffusion moyen est simplement

$$\overline{P^{(f)}(-n, t; -n_w, t_w | 0, 0)} = e^{-\beta f(n - n_w)} \overline{P^{(f)}(n, t; n_w, t_w | 0, 0)} \quad (9.15)$$

### 9.2.4 Discussion

Si on considère une équation maîtresse générale, la condition pour dériver un théorème de fluctuation non-linéaire analogue à celui qui existe pour le modèle de pièges est la suivante (Publication [P13]) : pour toute configuration  $\mathcal{C}$ , le taux de transition global pour en sortir en présence de  $(+f)$  doit être égal au taux de transition global pour en sortir en présence de  $(-f)$

$$w_{out}^{(+f)}(\mathcal{C}) = w_{out}^{(-f)}(\mathcal{C}) \quad \text{pour toute configuration } \mathcal{C} \quad (9.16)$$

A l'ordre linéaire en  $f$ , cette condition implique que l'observable  $b$  linéairement couplé au champ  $f$  (qui généralise la position dans le modèle de pièges) satisfait une loi de conservation : sa moyenne thermique doit être conservée en l'absence de champ pour une condition initiale arbitraire.

Existe-t-il d'autres modèles intéressants qui possèdent cette symétrie ? La façon la plus simple de satisfaire la condition (9.16) serait de pouvoir associer à toute transition  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  une autre transition  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$  qui a le même taux de transition en champ nul  $W^{(0)}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'') = W^{(0)}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')$  et telle que la variation de  $b$  soit exactement l'opposée  $b(\mathcal{C}'') - b(\mathcal{C}) = -(b(\mathcal{C}') - b(\mathcal{C}))$ . Cependant, c'est une propriété très forte car elle doit être vraie pour toute configuration initiale  $\mathcal{C}$ .

## 9.3 Étude de la réponse par renormalisation

Dans le Chapitre précédent sur le modèle de pièges sans biais, nous avons décrit une procédure de renormalisation à partir de la notion du temps d'évasion et des probabilités respectives de s'échapper vers le piège renormalisé de droite ou vers le piège renormalisé de gauche. En généralisant cette approche à la présence d'un champ extérieur  $f$ , on peut obtenir beaucoup de résultats exacts sur la dynamique.

### 9.3.1 Résultats explicites pour $t_w = 0$

La renormalisation permet de définir une échelle de longueur  $\xi(t, f)$  qui représente la distance moyenne entre deux pièges dans le paysage renormalisé associé à l'instant  $t$ . Cette échelle interpole entre les deux comportements

$$\xi(t, f) \underset{t \ll t_\mu(f)}{\simeq} t^{\frac{\mu}{1+\mu}} [1 + O(\mu)] \quad (9.17)$$

$$\xi(t, f) \underset{t \gg t_\mu(f)}{\simeq} (\beta f t)^\mu [1 + O(\mu)] \quad (9.18)$$

### 9.3.1.1 Front de diffusion

La moyenne sur les échantillons du front de diffusion prend la forme d'échelle

$$\overline{P_t(n, f)} = \frac{1}{\xi(t, f)} g_\mu \left( X = \frac{n}{\xi(t, f)}, F = \beta f \xi(t, f) \right) \quad (9.19)$$

et la fonction d'échelle  $g_\mu$  a pour expression, dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} g_0(X, F) &= e^{-|X|} \left[ \theta(X > 0) + \theta(X < 0) e^{-F|X|} \right] \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\lambda} \frac{1 - e^{-F\lambda}}{1 - e^{-F(|X|+\lambda)}} \quad (9.20) \\ &= e^{-|X|} \left[ \theta(X > 0) + \theta(X < 0) e^{-F|X|} \right] \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F}{(1 + Fn)(1 + F + Fn)} e^{-nF|X|} \end{aligned}$$

### 9.3.1.2 Position moyenne

La moyenne sur les échantillons de la moyenne thermique de la position est de la forme

$$\overline{\langle x(t, f) \rangle} \equiv \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x \overline{P_t(x, f)} = \xi(t, f) \mathcal{X}_\mu(F = \beta f \xi(t, f)) \quad (9.21)$$

et la fonction d'échelle  $\mathcal{X}_\mu$  a pour expression, dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ ,

$$\mathcal{X}_0(F) = \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda e^{-\lambda} \frac{\frac{F\lambda}{2} \coth \frac{F\lambda}{2} - 1}{F} = 1 - \frac{1}{F} - \frac{1}{F^3} \psi'' \left( 1 + \frac{1}{F} \right) \quad (9.22)$$

### 9.3.1.3 Largeur thermique

La moyenne sur les échantillons de la largeur thermique est de la forme

$$\overline{\langle \Delta x^2(t, f) \rangle} = \xi^2(t, f) \Delta_\mu(F = \beta f \xi(t, f)) \quad (9.23)$$

et la fonction d'échelle  $\Delta_0$  est en fait directement reliée à la fonction  $\mathcal{X}_0$

$$\Delta_0(F) = \left[ \frac{1}{F} + \frac{d}{dF} \right] \mathcal{X}_0(F) \quad (9.24)$$

## 9.3.2 Résultats explicites pour $t_w > 0$

### 9.3.2.1 Dynamique effective en fonction de $(f, t, t_w)$

L'état atteint au temps  $t_w$  en l'absence de champ doit être considéré comme une condition initiale pour la dynamique en présence du champ  $f > 0$  en fonction du nouveau temps  $(t - t_w)$ . Comme à l'instant  $t_w$ , la particule est typiquement dans un piège  $\tau > R(t_w, f = 0)$ , la dynamique effective ne recommence que lorsque la procédure



de décimation redevient active pour  $R(t - t_w, f) > R(t_w, f = 0)$ . Il est donc utile d'introduire le paramètre

$$\alpha(t, t_w, f) \equiv \frac{\xi(t - t_w, f)}{\xi(t_w, f = 0)} = \frac{R^\mu(t - t_w, f)}{R^\mu(t_w, f = 0)} \quad (9.25)$$

qui mesure les échelles de longueur des deux paysages renormalisés à  $t_w$  et à  $t$ . Dans le secteur  $\alpha < 1$ , la réponse est dominé par des évènements rares, alors que dans le secteur  $\alpha(t, t_w, f) > 1$ , la réponse est dominé par la dynamique effective. Le domaine en  $(t - t_w)$  correspondant au secteur  $\alpha > 1$  dépend des valeurs relatives de  $t_w$  et du temps  $t_\mu(f)$ .

(i) Pour  $t_w \ll t_\mu(f)$ , le secteur  $\alpha > 1$  correspond au domaine temporel  $(t - t_w) > t_w$ , et le paramètre  $\alpha$  se comporte selon

$$\alpha(t, t_w, f) = \left( \frac{t - t_w}{t_w} \right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} \quad \text{for } t_w < t - t_w \ll t_\mu(f) \quad (9.26)$$

et

$$\alpha(t, t_w, f) = \left( \frac{\frac{\beta f}{2}(t - t_w)}{t_w^{\frac{1}{1+\mu}}} \right)^\mu \quad \text{for } t - t_w \gg t_\mu(f) \quad (9.27)$$

(ii) Pour  $t_w \gg t_\mu(f)$ , le secteur  $\alpha > 1$  correspond au domaine  $(t - t_w) > \frac{2}{\beta f} t_w^{\frac{1}{1+\mu}}$ , et le paramètre  $\alpha$  se comporte comme (9.27) partout.

En étudiant la statistique du paysage renormalisé à deux échelles de renormalisation successives, on peut alors obtenir des résultats explicites valables dans tout le secteur  $\alpha > 1$  dans la limite  $\mu \rightarrow 0$

### 9.3.2.2 Loi du déplacement entre $t_w$ et $t$

En termes des variables d'échelle  $Y = \frac{x(t) - x(t_w)}{\xi(t - t_w, f)}$ ,  $F = \beta f \xi(t - t_w, f)$  et  $\alpha = \xi(t - t_w, f) / \xi(t_w, f = 0)$ , la moyenne sur les échantillons de la distribution de  $Y$  est de la forme

$$P(Y; F, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \delta(Y) + \left[ \theta(Y \geq 0) + e^{-F|Y|} \theta(Y \leq 0) \right] G_{ns}(|Y|, F, \alpha) \quad (9.28)$$

La partie singulière en  $\delta$  représente les particules qui n'arrivent pas à s'échapper vers un autre piège renormalisé entre  $t_w$  et  $t$ . La partie régulière est définie en termes de la fonction

$$G_{ns}(Y, F, \alpha) = \frac{e^{-Y}}{2} \int_0^{+\infty} du \frac{1 - e^{-Fu}}{1 - e^{-F(Y+u)}} \left[ (2 - e^{-(\alpha-1)Y}) e^{-u} - e^{-\alpha u} \right] \quad (9.29)$$

Plus généralement, on peut calculer ainsi toutes les fonctions d'échelle souhaitées dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ , en particulier pour la position moyenne et la largeur thermique (Publication [P14]).

## 9.4 Conclusion

C'est la symétrie particulière de l'équation maîtresse du modèle de pièges qui empêche la violation du Théorème de Fluctuation-Dissipation même dans le régime de vieillissement. Par ailleurs, la renormalisation basée sur les temps d'évasion, qui devient exacte dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ , permet d'étudier en détail la réponse non-linéaire dans les différents régimes qui existent en fonction des deux temps  $(t_w, t)$  et du champ extérieur  $f$ .

### Publications associées

Sur le théorème de Fluctuation-Dissipation non-linéaire : [P13]

Sur les calculs explicites par renormalisation : [P14]



## Chapitre 10

# Chaîne de spin quantique $S = 1$ antiferromagnétique aléatoire

### 10.1 La chaîne antiferromagnétique $S = 1$ sans désordre

#### 10.1.1 Différences entre spin demi-entier et spin entier

Alors que la chaîne antiferromagnétique  $S = 1/2$  présente des corrélations en loi de puissance et des excitations sans gap, la chaîne antiferromagnétique  $S = 1$  est caractérisée par des corrélations à décroissance exponentielle et par un gap pour les excitations. Une façon simple de comprendre ces différences qui existent plus généralement entre spins demi-entiers et spins entiers est la fonction d'onde “Valence-Bond-Solid” (VBS), qui permet de mettre en évidence un ordre à longue portée pour un paramètre d'ordre topologique qui est non-local en termes de spins.

#### 10.1.2 La fonction d'onde VBS

Si on représente chaque spin  $S = 1$  comme la symétrisation de deux spins élémentaires  $S = 1/2$ , la fonction d'onde VBS [1] est l'état obtenu en formant un singulet sur chaque lien entre deux spins  $1/2$  constitutifs (Figure 10.1). Cette fonction d'onde est l'état

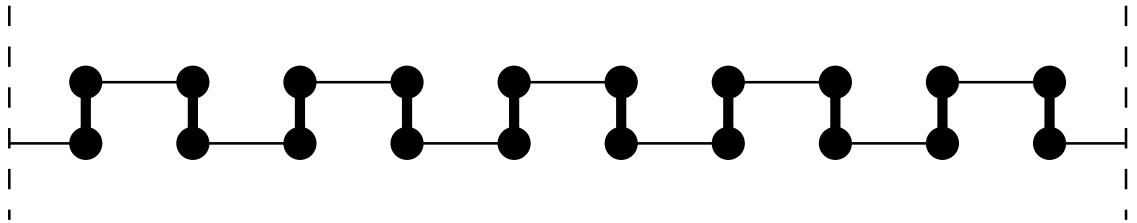


FIG. 10.1 – *Fonction d'onde VBS : chaque spin  $S = 1$  est représenté par la symétrisation de 2 spins  $1/2$  (les boules noires reliées par un trait vertical gras) ; les lignes horizontales qui relient deux spins  $1/2$  représentent les singulets entre spins  $1/2$  constitutifs.*

fondamental exact de l'Hamiltonien [1]

$$H_{AKLT} = \sum_i P_2(\vec{S}_i + \vec{S}_{i+1}) = \sum_i \left[ \frac{1}{2} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} + \frac{1}{6} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1})^2 + \frac{1}{3} \right] \quad (10.1)$$

où  $P_2$  est le projecteur sur le sous-espace  $s = 2$ .

### 10.1.3 Le paramètre d'ordre topologique

Le paramètre d'ordre [145] qui permet de caractériser l'ordre topologique de la fonction d'onde VBS est non local dans les spins

$$t_{ij} = -\langle \psi_o | S_i^z \exp \left[ i\pi \sum_{i < k < j} S_k^z \right] S_j^z | \psi_o \rangle \quad (10.2)$$

Pour l'état pur VBS sur une chaîne cyclique de  $N$  spins, on obtient  $t_{ij} = 4/9 + O(3^{-N})$ . Pour le fondamental de la chaîne antiferromagnétique pure, ce paramètre d'ordre tend aussi vers une valeur finie, ce qui indique une parenté avec la fonction d'onde VBS.

## 10.2 Construction des règles de renormalisation

### 10.2.1 Renormalisation d'un lien antiferromagnétique

L' Hamiltonien d'un lien antiferromagnétique entre deux spins  $S = 1$

$$h_0 = J_1 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{J_1}{2} \left[ (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 \right] = \frac{J_1}{2} \left[ (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - 4 \right] \quad (10.3)$$

présente trois niveaux d' énergie indexés par la valeur  $s = 0, 1, 2$  du spin total

$$e_s = \frac{J_1}{2} [s(s+1) - 4] \quad (10.4)$$

il y a donc un singulet  $e_0 = -2J_1$ , un triplet  $e_1 = -J_1$  et un quintuplet  $e_2 = J_1$ .

Si on généralise naïvement la règle de Ma-Dasgupta du cas  $S = 1/2$  en projetant sur le singulet, le nouveau couplage effectif est

$$J'_0 = \frac{4}{3} \frac{J_0 J_2}{J_1} \quad (10.5)$$

Le coefficient  $\frac{4}{3}$  étant plus grand que 1, cette règle n'est pas automatiquement consistante, et la procédure ne peut être justifiée que si on part d'un désordre assez large.

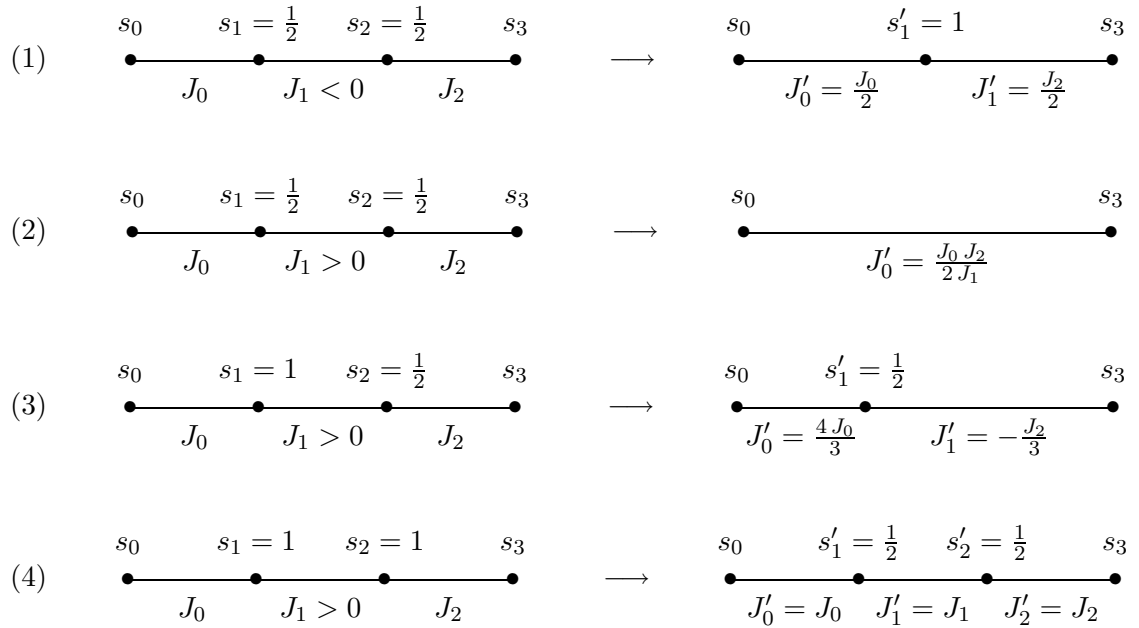
Nous avons donc proposé de généraliser la procédure de Ma-Dasgupta avec la règle suivante : au lieu de projeter sur le niveau le plus bas de  $h_0$ , il faut en fait éliminer le niveau le plus haut. Ainsi, pour l'hamiltonien  $h_0$ , on élimine le quintuplet, mais on garde le singulet et le triplet, en remplaçant les deux spins  $S = 1$  par deux spins  $S = 1/2$ . Cette décimation partielle élargit l'espace initial, mais il est possible de définir une renormalisation fermée avec 4 types de liens.

### 10.2.2 Procédure de renormalisation avec 4 types de liens

La procédure de renormalisation que nous avons proposée est définie pour l'ensemble élargi des chaînes constituées de spins de taille  $S = 1/2$  ou  $S = 1$ , dans lesquelles les couplages  $\{J_i\}$  sont soit ferromagnétiques (F) soit antiferromagnétiques (AF), avec la contrainte suivante : pour tout segment  $\{i, j\}$ , l'aimantation classique doit satisfaire  $|m_{i,j}| \leq 1$ . Cette condition pour deux voisins  $j = i + 1$  montre qu'il y a 4 types de liens possibles :

- 1) Lien F entre deux spins  $S=1/2$ ,
- 2) Lien AF entre deux spins  $S=1/2$ ,
- 3) Lien AF entre un spin  $S=1$  et un spin  $S=1/2$ ,
- 4) Lien AF entre deux spins  $S=1$ .

Les quatre règles de renormalisation correspondantes sont les suivantes :



### 10.2.3 Interprétation de la renormalisation en termes d'amas VBS

Si on représente chaque spin  $S = 1$  initial comme la symétrisation de deux spins  $S = 1/2$ , les règles 2, 3, et 4 pour les liens AF s'interprètent comme la formation d'un singulet entre deux spins  $S = 1/2$  constitutifs. La règle 1 pour un lien F entre deux spins  $S = 1/2$  correspond à leur symétrisation. À la fin de la procédure de renormalisation, lorsqu'il n'y a plus de spin libre, la chaîne est décomposée en un ensemble d'amas disjoints qui ont une structure VBS (Figure 10.2).

Pour la chaîne désordonnée, on a donc un paramètre d'ordre (10.2)  $t_{ij} = 4/9$  si les deux sites appartiennent au même amas et  $t_{ij} = 0$  sinon. Pour une chaîne de taille  $N$ ,

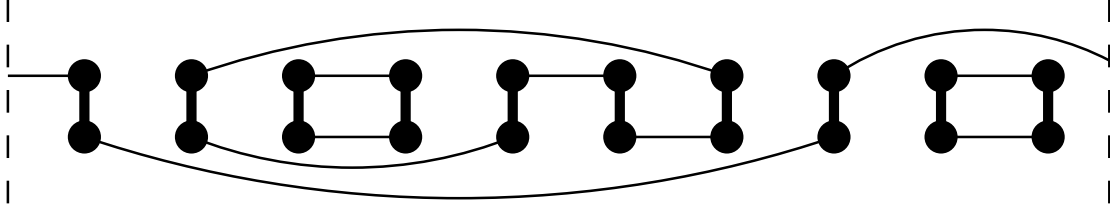


FIG. 10.2 – L'état fondamental obtenu par renormalisation, en termes d'amas VBS : chaque spin  $S = 1$  est représenté par la symétrisation de 2 spins  $1/2$  (les boules noires reliées par un trait vertical gras) ; les lignes qui relient deux spins  $1/2$  représentent des singulets. Les spins  $1$  initiaux sont ainsi regroupés en amas : ici, par exemple, il y a deux amas de taille 2, un amas de taille 4, et un amas plus grand qui dépasse les limites de la figure.

la moyenne spatiale  $\sum_{i,j} t_{ij}/N^2$  du paramètre  $t_{ij}$  est proportionnelle à la probabilité  $T$  que deux spins appartiennent au même amas

$$T \equiv \sum_c \frac{n_c^2}{N^2} = \frac{9}{4} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} t_{ij} + O(1/N) \quad (10.6)$$

où  $n_c$  est le nombre de spins dans un amas  $c$ , qui n'est pas directement liée à son extension spatiale. Ce paramètre d'ordre  $T$  ne peut être non-nul dans la limite thermodynamique que s'il existe un amas VBS qui contient une fraction finie des spins de la chaîne.

### 10.3 Étude numérique de la renormalisation

Nous avons étudié numériquement la procédure de renormalisation avec 4 types de liens en partant de chaînes cycliques de  $N$  spins (par exemple  $N = 2^{22} \sim 4.10^6$ ), avec des couplages initiaux  $J_i$  uniformément distribués dans l'intervalle  $[1, 1 + d]$ . Le paramètre  $d$  représente donc la largeur du désordre initial. Pour chaque taille, nous avons effectué des moyennes sur un certain nombre d'échantillons (typiquement 100).

Nous avons étudié le flot des quantités suivantes en fonction de l'échelle  $\Gamma$  :

- (i) le nombre  $N(\Gamma)$  de spins effectifs  $S = 1/2$  et  $S = 1$  encore présents à l'échelle  $\Gamma$
- (ii) la proportion  $\{N_{(S=1)}(\Gamma)/N(\Gamma)\}$  de spins  $S = 1$  parmi les spins effectifs présents
- (iii) les proportions  $\rho_i(\Gamma) = \{N_i(\Gamma)/N(\Gamma)\}$  des liens de type  $i = 1, 2, 3, 4$
- (iv) les distributions de probabilité  $P_i(J, \Omega)$  des couplages  $J$  pour les quatre types de liens  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Les résultats de la renormalisation présentent un changement qualitatif pour une certaine valeur critique  $d_c \simeq 5.75(5)$  du désordre initial. Ainsi, la Figure 10.3 représente le flot de la proportion  $\frac{N_{(S=1)}(\Gamma)}{N(\Gamma)}$  de spins  $S = 1$  pour différentes valeurs du désordre initial : il y a deux valeurs attractives, à savoir 0 à faible désordre et 1 à fort désordre.

### Proportion of spin-1 among the effective spins

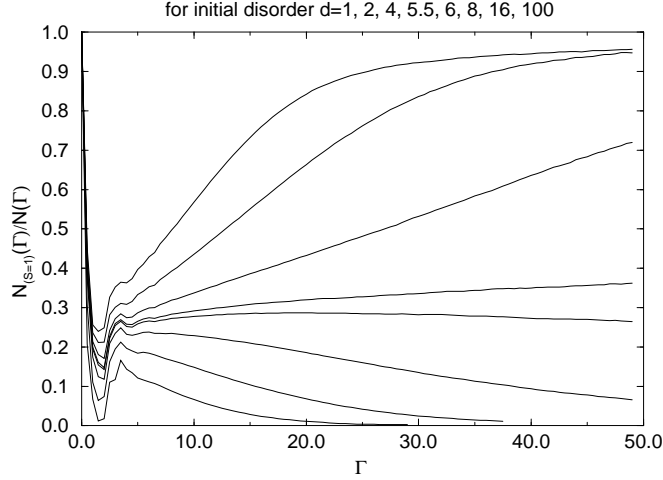


FIG. 10.3 – *Proportion de spins  $S = 1$  parmi les spins effectifs à l'échelle  $\Gamma$  pour différentes valeurs du désordre initial  $d = 1, 2, 3, 4, 5.5, 6, 8, 16, 100$  : cette proportion tend vers 0 dans la phase de faible désordre, et vers 1 dans la phase de fort désordre. Au point critique  $d_c \simeq 5.75(5)$  la proportion reste stationnaire autour de la valeur intermédiaire  $0.315(5)$ .*

#### 10.3.1 Résultats dans la phase de fort désordre

Dans la phase de fort désordre  $d > d_c$ , le nombre  $N(\Gamma)$  de spins effectifs décroît comme dans la phase appelée “Random Singlet” de la chaîne  $S = 1/2$  :

$$N(\Gamma) \underset{\Gamma \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{\Gamma^2}. \quad (10.7)$$

et les proportions  $\rho_i(\Gamma)$  des quatre types de liens convergent vers un régime asymptotique caractérisé par les proportions simples (Fig 10.4)

$$\rho_1(\Gamma) \sim 0 \quad \rho_2(\Gamma) \sim \epsilon(\Gamma) \quad \rho_3(\Gamma) \sim 2\epsilon(\Gamma) \quad \rho_4(\Gamma) \sim 1 - 3\epsilon(\Gamma) \quad (10.8)$$

où  $\epsilon(\Gamma)$  tend lentement vers 0 en  $\Gamma \rightarrow \infty$ . Il y a donc presque partout des liens de type 4, avec quelques défauts de type (lien de type 3, lien de type 2, lien de type 3) qui viennent de la décimation partielle momentanée des liens de type 4. A fort désordre, la renormalisation converge donc vers la phase “Random Singlet” de Ma-Dasgupta.

#### 10.3.2 Résultats dans la phase de faible désordre

Dans la phase de faible désordre, le nombre  $N(\Gamma)$  de spins effectifs décroît exponentiellement

$$N(\Gamma) \underset{\Gamma \rightarrow \infty}{\propto} e^{-\alpha(d)\Gamma} \quad (10.9)$$

avec un coefficient  $\alpha(d)$  qui est une fonction décroissante de  $d$  qui s'annule à la transition  $d \rightarrow d_c^-$ . Les proportions  $\rho_i(\Gamma)$  des quatre types de liens convergent vers le régime asymptotique (Figure 10.5)

$$\rho_1(\Gamma) \simeq 0.25 \quad \rho_2(\Gamma) \simeq 0.75 \quad \rho_3(\Gamma) \simeq 0 \quad \rho_4(\Gamma) \simeq 0 \quad (10.10)$$



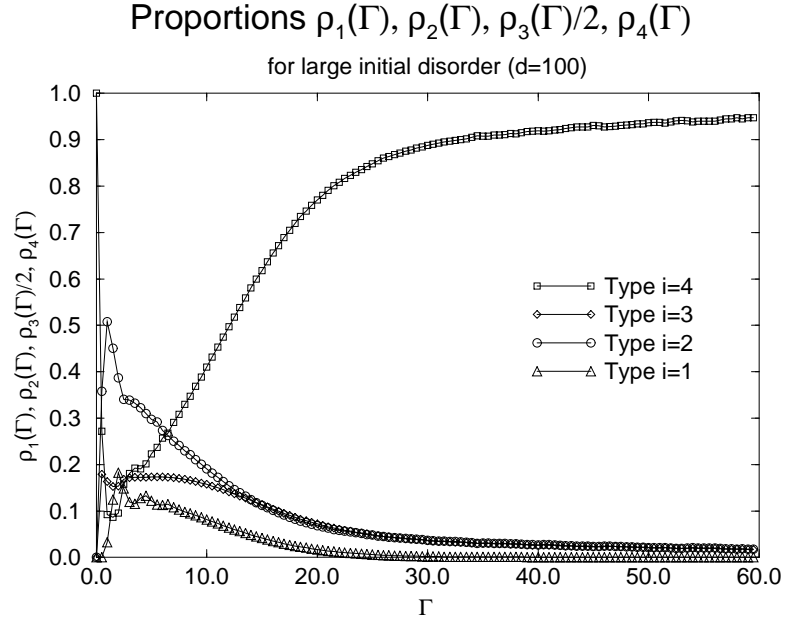


FIG. 10.4 – Les proportions  $\rho_i(\Gamma)$  des 4 types de liens  $i = 1, 2, 3, 4$  of en fonction de l'échelle  $\Gamma$  pour un désordre initial fort  $d = 100$ .

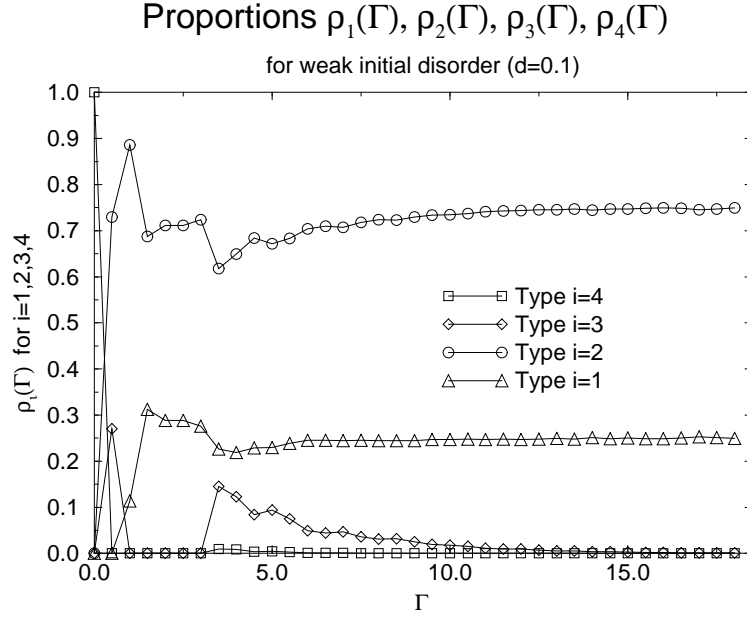


FIG. 10.5 – Les proportions  $\rho_i(\Gamma)$  des 4 types de liens  $i = 1, 2, 3, 4$  of en fonction de l'échelle  $\Gamma$  pour un désordre initial faible  $d = 0.1$

### 10.3.3 Résultats numériques au point critique

### 10.3.4 Étude des types de liens

Au point critique, le nombre de spins effectifs décroît algébriquement

$$N(\Gamma) \underset{\Gamma \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{\Gamma^3}. \quad (10.11)$$

et les proportions  $\rho_i(\Gamma)$  des quatre types de lien convergent vers le régime asymptotique (Figure 10.6)

$$\rho_1(\Gamma) \sim 0.17, \quad \rho_2(\Gamma) \sim 0.35, \quad \rho_3(\Gamma) \sim 0.33, \quad \rho_4(\Gamma) \sim 0.15. \quad (10.12)$$

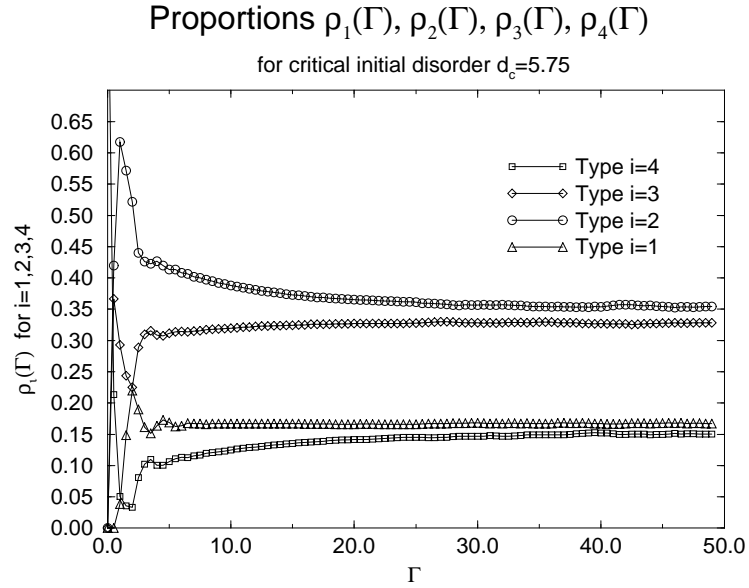


FIG. 10.6 – Les proportions  $\rho_i(\Gamma)$  des 4 types de liens  $i = 1, 2, 3, 4$  of en fonction de l'échelle  $\Gamma$  pour un désordre initial critique  $d_c = 5.75$ .

### 10.3.5 Étude numérique de la transition de percolation des amas VBS

Du point de vue des amas VBS, la transition de phase quantique correspond à une transition de percolation : dans la phase de fort désordre, il n'y a que des amas finis, alors que dans la phase de faible désordre, il apparaît un amas macroscopique qui contient une fraction finie des spins.

#### 10.3.5.1 Paramètre d'ordre

Si on note  $\beta$  l'exposant qui gouverne l'annulation de la fraction  $n_1/N$  des spins dans l'amas macroscopique, le paramètre d'ordre se comporte en  $T \sim (d_c - d)^{2\beta}$  pour

$d < d_c$ . L'étude de finite size scaling de la Figure (10.7) conduit à l'estimation

$$2\beta = 1.0(1). \quad (10.13)$$

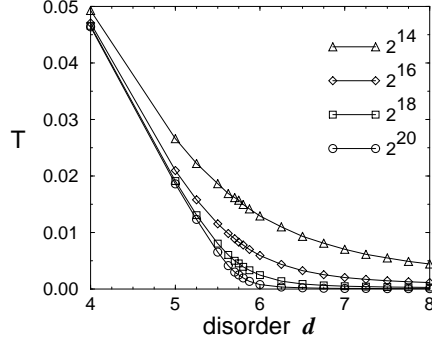


FIG. 10.7 – Paramètre d'ordre topologique  $T$  en fonction du désordre initial  $d$  pour des chaînes de tailles  $N = 2^{14} - 2^{20}$ . Le point critique est situé en  $d_c = 5.76(2)$

### 10.3.5.2 Susceptibilité

La Figure (10.8) représente la taille moyenne des amas finis, qui joue le rôle d'une susceptibilité

$$\chi \equiv \sum_{c>1} \frac{n_c^2}{N}. \quad (10.14)$$

( $c=1$  est l'amas le plus grand). Si on note  $\gamma$  l'exposant critique qui gouverne sa divergence  $\chi \sim |d_c - d|^{-\gamma}$ , on obtient l'estimation

$$\gamma = 1.2(1). \quad (10.15)$$

### 10.3.5.3 Distribution des amas au point critique

Au point critique, la distribution  $m_c(s)$  de la taille  $s$  des amas a une décroissance algébrique (Figure 10.9)

$$m_c(s) \sim \frac{1}{s^\tau} \quad (10.16)$$

avec un exposant

$$\tau = 2.2(1). \quad (10.17)$$

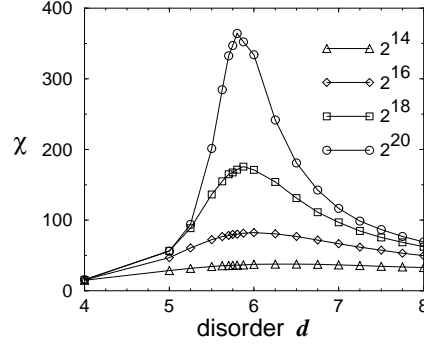


FIG. 10.8 – Susceptibilité  $\chi$  en fonction du désordre initial  $d$  pour des chaînes de tailles  $N = 2^{14} - 2^{20}$ .

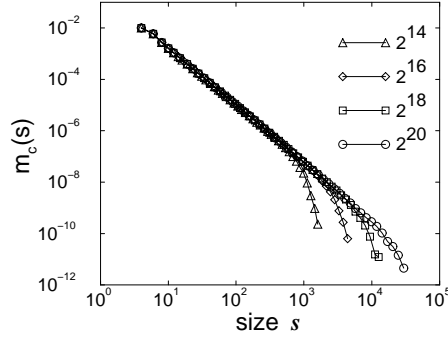


FIG. 10.9 – Distribution  $m_c(s)$  de la taille  $s$  des amas au point critique : la mesure de la pente conduit à l'estimation  $\tau = 2.2(1)$

## 10.4 Calcul des exposants critiques exacts

Il existe un modèle effectif plus simple de chaîne de spin [98] qui se trouve être dans la même classe d'universalité (Publications [P1]). En introduisant une variable auxiliaire  $\mu$  pour étudier la taille des amas VBS dans ce modèle plus simple, nous avons calculé les exposants exacts de la transition

$$2\beta = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{13} - 1} = 1.17278..., \quad (10.18)$$

$$\gamma = \frac{2(2\sqrt{5} - 3)}{\sqrt{13} - 1} = 1.13000..., \quad (10.19)$$

$$\tau = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} = 2.34164..., \quad (10.20)$$

qui sont en très bon accord avec nos estimations numériques (10.13), (10.15), (10.17).

## 10.5 Conclusion

La généralisation de la méthode de Ma-Dasgupta à la chaîne de spin  $S = 1$  antiferromagnétique aléatoire conduit à un modèle à 4 types de liens que nous avons étudié numériquement. La transition de phase observée en fonction du désordre initial s'interprète comme une transition de percolation pour les amas VBS de l'état fondamental. En utilisant un modèle effectif dans la même classe d'universalité, nous avons calculé les exposants critiques exacts de cette transition de phase quantique.

### Publications associées

Sur la transition de percolation des amas VBS : [P1]

Sur les degrés de liberté effectifs de basse énergie dans les différentes phases : [P2]

## Chapitre 11

# Chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires

### 11.1 Présentation du modèle

#### 11.1.1 Transition de phase quantique

La chaîne d'Ising quantique

$$H = - \sum_i J_i S_i^z S_{i+1}^z - \sum_i h_i S_i^x \quad (11.1)$$

avec couplages  $J_i > 0$  et champs transverses  $h_i > 0$  aléatoires (les signes peuvent être fixés par une transformation de jauge), est le modèle désordonné le plus simple qui présente une transition de phase quantique à température nulle : le point critique situé en

$$\overline{\ln h} = \overline{\ln J} \quad (11.2)$$

sépare une phase ferromagnétique ( $\overline{\ln h} < \overline{\ln J}$ ) d'une phase désordonnée ( $\overline{\ln h} > \overline{\ln J}$ ). Ce modèle peut être étudié en détail par la renormalisation de type Ma-Dasgupta [75] comme nous l'avons déjà expliqué dans l'Introduction (Page 4). Dans ce Chapitre, nous allons nous intéresser aux propriétés de taille finie au voisinage de la transition, dans deux ensembles possibles pour le désordre.

#### 11.1.2 Ensembles microcanonique et canonique pour un système désordonné fini

Dans l'étude des systèmes désordonnés, on considère généralement que les variables aléatoires de désordre dans un échantillon sont des variables indépendantes : cet ensemble d'échantillons sera appelé ici 'canonique' comme dans les références [99, 66]. (ce qui correspond à l'ensemble appelé 'grand canonique' dans d'autres références [147, 3, 168, 15]). Cependant, il est apparu qu'il pouvait être intéressant [147] de considérer

aussi un ensemble d'échantillons appelé 'microcanonique' dans les références [99, 66] (qui correspond à l'ensemble appelé 'canonique' dans les références [147, 3, 168, 15]). Dans cet ensemble microcanonique, il existe une contrainte globale sur les variables aléatoires de désordre dans un échantillon de  $N$  sites. Le premier exemple important concerne un système pur avec une fraction  $p \in [0, 1]$  d'impuretés [147] : dans l'ensemble canonique, le nombre total d'impuretés présente des fluctuations d'ordre  $\sqrt{N}$  autour de sa valeur moyenne  $pN$ , alors que dans l'ensemble microcanonique, le nombre total d'impuretés est exactement  $pN$  dans tous les échantillons, et le désordre restant ne concerne que les positions des impuretés. Il est clair que l'ensemble microcanonique est beaucoup moins désordonné que l'ensemble canonique, et en effet il conduit parfois à des réductions spectaculaires de bruit dans les études numériques [147, 15].

Pour la Chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires, l'ensemble microcanonique au point critique (11.2) est défini par la contrainte globale [99, 66]

$$\sum_{i=1}^L (\ln J_i - \ln h_i) = 0 \quad (11.3)$$

alors que dans l'ensemble canonique, la quantité du membre de gauche présente des fluctuations d'ordre  $\sqrt{L}$  autour de sa valeur moyenne nulle. Les échantillons de l'ensemble microcanonique sont donc 'plus proches' du point critique dans un certain sens, et permettent d'obtenir des résultats numériques avec moins de fluctuations.

Mais il y a un débat sur l'intérêt physique de cet ensemble microcanonique. D'un côté, certains auteurs [147, 15] pensent que l'ensemble microcanonique doit être préféré à l'ensemble canonique qui introduirait un bruit supplémentaire susceptible de masquer les propriétés 'intrinsèques' du système. D'un autre côté, les fluctuations d'ordre  $\sqrt{l}$  d'une somme de  $l$  variables aléatoires sont précisément une propriété essentielle des systèmes désordonnés, qui apparaît par exemple dans les divers arguments physiques discutés dans l'Introduction (Page 2). De plus, si on divise un système de taille  $L$  en deux sous-systèmes de taille  $L/2$ , chaque moitié présente des fluctuations d'ordre  $\sqrt{L}$  dans les deux ensembles : dans l'ensemble canonique, ces deux moitiés sont indépendantes, alors que dans l'ensemble microcanonique, les deux moitiés sont complètement corrélées et ont des fluctuations opposées. De ce point de vue, l'ensemble microcanonique peut donc apparaître comme artificiel.

Bien sûr, on s'attend à ce que les deux ensembles soient équivalents dans la limite thermodynamique, mais comme dans la théorie des lois d'échelle en taille finie, on mesure les exposants thermodynamiques sur les propriétés de taille finie, la discussion sur les deux ensembles conduit en fait au problème de la théorie du 'finite-size scaling' pour les systèmes désordonnés [147, 168, 15].

### 11.1.3 Théorie du 'finite-size scaling' pour les systèmes désordonnés ?

En présence de désordre, la question centrale est la suivante [147, 168, 15] : si on obtient par simulations numériques des valeurs pour une observable comme la susceptibilité  $\chi(i, L)$ , pour plusieurs échantillons ( $i$ ) pour diverses tailles  $L$ , quelle est la

meilleure procédure pour analyser ces données ? La procédure usuelle consiste à moyenner l'observable sur les échantillons de taille fixée  $\chi_m(L) = \langle \chi(i, L) \rangle_i$  et à analyser la dépendance en  $L$  de la valeur moyenne  $\chi_m(L)$  comme dans la théorie du 'finite-size scaling' d'un système pur. Cependant, les références [147, 168, 15] qui ont étudié la question sont arrivées à la conclusion que la procédure correcte consiste à introduire une pseudo-température critique  $T_c(i, L)$  qui dépend de l'échantillon. En effet, ces études ont montré que les fluctuations de  $\chi(i, L)$  entre les échantillons venaient en grande partie des fluctuations de  $T_c(i, L)$ , et que l'emploi de la variable réduite de la variable  $(T - T_c(i, L))$  dans l'analyse de 'finite-size scaling' permettait d'obtenir de bien meilleurs résultats (cf par exemple les Fig.2 et Fig.3 dans la référence [15]). De ce point de vue, l'avantage de l'ensemble microcanonique par rapport à l'ensemble canonique est justifié si la contrainte microcanonique détermine en fait  $T_c(i, L)$  ou du moins réduit considérablement ses fluctuations entre échantillons, comme dans le cas des distributions binaires [147, 15]. Pour les transitions de phase quantiques, la pseudo-température critique  $T_c(i, L)$  doit être remplacé par un pseudo point critique comme dans la chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires, avec la contrainte (11.3).

### 11.1.4 Observables intéressantes en taille finie

Les études numériques sur les propriétés de taille finie dans les deux ensembles [99, 66] se sont intéressées aux observables suivantes :

- les aimantations de surface définies comme l'aimantation d'un bord lorsque le spin à l'autre extrémité est fixé

$$m_1^s \equiv \langle \sigma_1^z \rangle |_{\sigma_L^z=1} \quad (11.4)$$

$$m_L^s \equiv \langle \sigma_L^z \rangle |_{\sigma_1^z=1} \quad (11.5)$$

et leur corrélation  $(m_1^s m_L^s)$ .

- la corrélation spin-spin entre les deux bords

$$C(L) \equiv \langle \sigma_1^z \sigma_L^z \rangle \quad (11.6)$$

- le 'gap', qui représente la différence d'énergies entre les deux premiers niveaux

$$\Delta(L) \equiv E_1 - E_0 \quad (11.7)$$

Le but de ce chapitre est de comparer analytiquement les comportements de ces diverses observables dans les deux ensembles, au point critique et dans son voisinage.

## 11.2 Résultats sur l'aimantation de surface

### 11.2.1 Aimantation de surface et variable de Kesten

L'aimantation de surface (11.5) dans un échantillon de taille  $(L + 1)$  a en fait une expression exacte en fonction des couplages aléatoires [99, 66]

$$m_1^S = [1 + Z_L]^{-1/2} \quad (11.8)$$



où

$$Z_L \equiv \sum_{i=1}^L \prod_{j=1}^i \left( \frac{h_i}{J_i} \right)^2 \quad (11.9)$$

a une structure spécifique de somme de produits de nombres aléatoires connue sous le nom de variable aléatoire de Kesten [114]. Ce type de variables apparaît aussi dans les versions discrètes du modèle de Sinai [158, 156, 57], et dans divers problèmes formulés en termes de produit de matrices de transfert aléatoires  $2 \times 2$  [58, 35]. La version continue d'une variable de Kesten est la fonctionnelle exponentielle [22, 136]

$$Z_L = \int_0^L dx e^{-U(x)} \quad (11.10)$$

du mouvement Brownien  $U(x) = \int_0^x dy F(y)$  où le processus  $\{F(x)\}$  correspond à la version continue des variables  $(-2 \ln(h_i/J_i))$ .

## 11.2.2 Distributions asymptotiques de l'aimantation de surface

### 11.2.2.1 Méthode du col dans chaque échantillon

Il est naturel d'évaluer l'intégrale (11.10) pour  $L$  grand par une méthode du col

$$Z_L \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} e^{E_L} \quad (11.11)$$

où  $(-E_L) < 0$  est le minimum du processus  $U(x)$  sur l'intervalle  $[0, L]$ . Au point critique, le scaling  $E_L \sim \sqrt{L}$  montre qu'il existe une distribution limite pour la variable d'échelle  $(\ln Z_L)/\sqrt{L} \sim \ln m_L^s/\sqrt{L} \sim E_L/\sqrt{L}$ .

### 11.2.3 Lois d'échelle dans les deux ensembles

Plus généralement, au voisinage du point critique on obtient les formes d'échelle suivantes pour la distribution de probabilité  $(-\ln m_1^s)$

$$P_L(-\ln m_1^s) = \frac{2}{\sqrt{\sigma L}} Q \left( w = \frac{-2 \ln m_1^s}{\sqrt{\sigma L}}; \gamma = \mu \sqrt{\sigma L} \right) \quad (11.12)$$

où les fonctions d'échelle sont respectivement données dans les deux ensembles par

$$Q_{cano}(w; \gamma) = \theta(w > 0) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(w+\gamma)^2}{4}} + \gamma e^{-\gamma w} \int_{\frac{w-\gamma}{2}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \right] \quad (11.13)$$

$$Q_{micro}(w; \gamma) = \theta(w > 0) \theta(w > -\gamma) (2w + \gamma) e^{-\gamma w - w^2} \quad (11.14)$$

Ces résultats ont aussi été obtenus dans la référence [66] par une méthode différente. L'avantage de la formulation par la méthode du col (11.11) est d'une part de clarifier la validité des formules (11.14) et d'autre part, de pouvoir être généralisée à d'autres observables, comme la corrélation entre les deux aimantations de surface.

### 11.2.3.1 Distribution asymptotique de la corrélation $(m_1^s m_L^s)$

De même, si on évalue par une méthode du col dans chaque échantillon la corrélation  $(m_1^s m_L^s)$  entre les deux aimantations de surface, on obtient

$$\ln(m_1^s m_L^s) \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{U(0) - U_{min} + U_{max} - U(L)}{2} \quad (11.15)$$

Le calcul de la distribution asymptotique de  $(m_1^s m_L^s)$  se ramène donc au calcul de la loi jointe de l'amplitude  $A(L) = U_{max} - U_{min}$  et du point final  $U(L)$  d'une trajectoire Brownienne partant de  $U(0) = 0$ . Les résultats pour les deux ensembles (canonique et microcanonique) sont donnés dans la Publication [P15].

## 11.2.4 Moyenne de l'aimantation de surface

### 11.2.4.1 Évènements rares

On vient de voir qu'au point critique, l'aimantation de surface a pour comportement typique

$$m_1^s = e^{-\frac{\sqrt{\sigma L}}{2} w} \quad (11.16)$$

où  $w$  est une variable aléatoire d'ordre 1. La moyenne sur les échantillons de surface va donc être dominée par les échantillons rares qui présentent une aimantation anormalement grande d'ordre 1, et sa décroissance avec la taille  $L$  va être gouvernée par la dépendance en  $L$  de la mesure de ces échantillons rares. Ainsi le comportement dans l'ensemble canonique [99, 66]

$$[m_1^s]_{cano} \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (11.17)$$

reflète directement la probabilité qu'une marche aléatoire ne repasse pas par l'origine dans l'intervalle  $[0, L]$ . En revanche, le comportement différent dans l'ensemble microcanonique [99, 66]

$$[m_1^s]_{micro} \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{L} \quad (11.18)$$

peut être interprété comme le rapport entre

- (i) la probabilité  $1/L^{3/2}$  pour la probabilité de premier retour
- (ii) la probabilité  $1/\sqrt{L}$  d'être à l'origine en  $L$ .

## 11.2.5 Résultats exacts par un calcul d'intégrale de chemin

Grâce à une méthode d'intégrale de chemin avec contraintes (Publication [P15]), on peut calculer les distributions exactes de l'aimantation de surface en taille finie (c'est à dire sans faire la méthode du col (11.11)) et obtenir ainsi exactement les aimantations moyennes dans les deux ensembles.

Dans l'ensemble canonique, on trouve

$$[m_1^s]_{cano}(\gamma = \mu\sqrt{\sigma L}) \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{e^{\frac{1}{2\sigma}} K_0\left(\frac{1}{2\sigma}\right)}{\sqrt{\pi\sigma L}} \left[ e^{-\frac{\gamma^2}{4}} + \gamma \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{+\infty} dv e^{-v^2} \right] + O\left(\frac{1}{L}\right) \quad (11.19)$$

alors que dans l'ensemble microcanonique, on trouve que les deux variables d'échelle sont différentes des deux côtés de la transition, avec les fonctions d'échelle suivantes

$$\begin{aligned} [m_1^s]_{micro}(\gamma = \mu\sqrt{\sigma L} > 0) &\underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\gamma e^{\frac{1}{2\sigma}} K_0\left(\frac{1}{2\sigma}\right)}{\sqrt{\sigma L}} \\ [m_1^s]_{micro}(\rho = \mu\sigma L < 0) &\underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{4}{\sqrt{\pi\sigma L}} \int_0^{+\infty} dp p^{-1/2} e^{-p} K_0\left(2\sqrt{\frac{p}{\sigma}}\right) K_0\left(2\sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{-\frac{p}{2}}\right) + O\left(\frac{1}{L^2}\right) \end{aligned} \quad (11.20)$$

Le régime critique du côté désordonné est donc gouverné par la variable d'échelle  $\rho = \mu\sigma L < 0$  dans l'ensemble microcanonique, alors qu'il est gouverné par la variable d'échelle  $\gamma = \mu\sqrt{\sigma L} < 0$  dans l'ensemble canonique! C'est parce qu'il existe en fait deux exposants de corrélation.

### 11.2.5.1 Discussion des deux exposants de corrélation

Il apparaît deux exposants de corrélation distincts  $\nu = 2$  et  $\tilde{\nu} = 1$  dans l'étude de la chaîne dans la limite thermodynamique [75] : en particulier, la fonction de corrélation moyenne est gouvernée par l'exposant  $\nu = 2$ , alors que la corrélation typique est gouvernée par l'exposant  $\tilde{\nu} = 1$  [75]. Plus généralement, ces deux échelles de longueur apparaissent aussi dans des modèles reliés, en particulier dans l'étude des fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck du modèle de Sinai (cf la discussion Page 36) et dans les modèles unidimensionnels de transport pour les fermions [8, 139].

La présence de ces deux exposants peut être expliqué comme suit [75]. La première échelle de longueur correspond à la longueur  $\tilde{\xi}$  sur laquelle la valeur moyenne  $\overline{U(L) - U(0)} = F_0 L = \mu\sigma L$  devient d'ordre 1, ce qui donne

$$\tilde{\xi} \sim \frac{1}{\sigma\mu^{\tilde{\nu}}} \quad \text{avec } \tilde{\nu} = 1 \quad (11.21)$$

La seconde échelle de longueur correspond à la longueur  $\xi$  sur laquelle la plupart des échantillons sont effectivement caractérisés par une différence de potentiel  $(U(L) - U(0))$  qui est du même signe que la valeur moyenne : l'échelle  $\sqrt{\sigma L}$  des fluctuations doit être du même ordre que la valeur moyenne, ce qui donne

$$\xi \sim \frac{1}{\sigma\mu^{\nu}} \quad \text{avec } \nu = 2 \quad (11.22)$$

Cette analyse montre qu'il n'est pas surprenant de trouver qu'une même observable puisse être gouvernée par deux exposants différents dans les deux ensembles : en effet, si on cherche la longueur sur laquelle la plupart des échantillons 'connaissent' vraiment le signe de  $F_0$ , on voit que c'est la longueur  $\xi$  (11.22) dans l'ensemble canonique, mais que c'est la longueur  $\tilde{\xi}$  (11.21) dans l'ensemble microcanonique. En conclusion, la définition même des deux longueurs  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  montre que la contrainte microcanonique est susceptible de jouer un rôle dans les comportements d'échelle en taille finie.

### 11.3 Gap et corrélation entre spins de bord dans les deux ensembles

Contrairement aux aimantations de surface discutées jusqu'à présent, le gap  $\Delta(L)$  (11.7) et la corrélation  $C(L)$  (11.6) entre les deux spins de bord ne peuvent pas être exprimés simplement en termes de tous les couplages aléatoires de la chaîne. Cependant, ils peuvent être étudiés [77] grâce à la formulation en taille finie de la renormalisation de type Ma-Dasgupta, ce qui a permis de faire des prédictions détaillées pour l'ensemble canonique [77], qui sont en excellent accord avec les données numériques [77, 66]. Le but de cette section est de comparer ces résultats de l'ensemble canonique avec les résultats pour l'ensemble microcanonique calculés dans la Publication [P15].

#### 11.3.1 Détermination du gap et de la corrélation par renormalisation

L'analyse par renormalisation [75, 77] permet de déterminer le gap  $\Delta(L)$  (11.7) et la corrélation  $C(L)$  (11.6) dans chaque échantillon décrit par le potentiel Brownien  $U(x)$  for  $0 \leq x \leq L$  : le gap  $\Delta(L)$  est asymptotiquement déterminé par la dernière barrière renormalisée ascendante  $G$  selon

$$\ln \Delta(L) = -G \quad (11.23)$$

alors que la corrélation  $C(L)$  est asymptotiquement donnée par la variable  $\Lambda \equiv G - U(L) + U(0)$  selon

$$\ln C(L) = -\Lambda \quad (11.24)$$

En particulier, la renormalisation prédit une relation très simple dans chaque échantillon entre les deux observables

$$G - \Lambda = U(L) - U(0) \quad (11.25)$$

Cette prédiction a été confirmée numériquement au point critique, avec la convergence de la loi de la variable  $(G - \Lambda)/\sqrt{L}$  vers une distribution Gaussienne dans l'ensemble canonique, et vers une distribution  $\delta$  dans l'ensemble microcanonique [66].

#### 11.3.2 Résultats au point critique

##### 11.3.2.1 Gap dans les deux ensembles

Au point critique, les distributions de probabilité de la variable  $G = -\ln \Delta(L)$  ont respectivement pour transformées de Laplace par rapport à la longueur  $L$  dans les deux ensembles

$$\int_0^{+\infty} dL e^{-pL} \left[ P_L^{\mu=0}(G) \right]_{cano} = \frac{\sinh \sqrt{p}G}{\sqrt{p} \cosh^2 \sqrt{p}G} \quad (11.26)$$

$$\int_0^{+\infty} dL e^{-pL} \left[ \frac{P_L^{(\mu=0)}(G)}{\sqrt{4\pi L}} \right]_{micro} = \frac{\sqrt{p}G}{\sinh \sqrt{p}G} e^{-\sqrt{p}G \coth \sqrt{p}G} \quad (11.27)$$

En particulier, les comportements en singularités essentielles à l'origine obtenus après l'inversion des transformées de Laplace, conduisent à des comportements en exponentielles étirées pour les valeurs moyennes

$$[\Delta(L)]_{cano}^{scaling} \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} L^{1/6} e^{-\frac{3}{2} \left( \frac{\pi^2}{2} L \right)^{1/3}} \quad (11.28)$$

$$[\Delta_L]_{micro}^{scaling} = [C_L]_{micro}^{scaling} \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} L^{-1/6} e^{-\frac{3}{2} (2\pi^2 L)^{1/3} + 2(2\pi^2 L)^{1/6}} \quad (11.29)$$

### 11.3.2.2 Corrélation dans les deux ensembles

Dans l'ensemble canonique, la variable  $\Lambda = -\ln C(L)$  a une distribution très simple

$$P_{cano}^{\mu=0}(\Lambda) = \frac{\Lambda}{2L} e^{-\frac{\Lambda^2}{4L}} \quad (11.30)$$

qui conduit à une décroissance algébrique pour la valeur moyenne

$$[C(L)]_{cano}^{scaling} \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{L} \quad (11.31)$$

alors que dans l'ensemble microcanonique, les variables  $G = \Lambda$  sont identiques : la distribution (11.27) est très différente, et la valeur moyenne décroît selon l'exponentielle étirée (11.29).

### 11.3.3 Comportements dans la région critique

De même, on peut comparer les résultats explicites sur le gap et la corrélation au voisinage du point critique, du côté ordonné et du côté désordonné (Publication [P15]). On trouve que les distributions de probabilité sont gouvernées par l'exposant critique  $\nu = 2$  dans les deux ensembles, mais que l'exposant  $\tilde{\nu} = 1$  gouverne les observables suivantes dans l'ensemble microcanonique, au lieu de l'exposant  $\nu = 2$  de l'ensemble canonique :

- la moyenne de la corrélation dans la phase désordonnée
- la moyenne du gap dans la phase ordonnée.

De nouveau, ces différences entre les deux ensembles viennent de la présence de deux échelles de longueur (11.21) et (11.22).

## 11.4 Conclusion

Cette étude explicite des propriétés de taille finie de la transition de phase quantique, permet de clarifier l'origine des différences entre les deux ensembles, canonique et microcanonique, pour le désordre. Les variables d'échelle sont les mêmes dans les deux ensembles, mais les lois de probabilité réduites sont différentes, notamment dans leurs comportements asymptotiques. En conséquence, les moyennes des observables qui sont gouvernées par des événements rares peuvent avoir des comportements critiques très différents.

Par ailleurs, l'étude de l'aimantation de surface qui admet une expression fermée en termes des variables de désordre, éclaire la signification de la méthode de type Ma-Dasgupta. En effet, dans le cas particulier de l'aimantation de surface écrite sous la forme de variable de Kesten, la méthode de Ma-Dasgupta correspond exactement à la méthode du col dans chaque échantillon. Plus généralement, on peut donc voir la méthode de Ma-Dasgupta pour les autres observables comme un accès direct 'au col' dans chaque échantillon, alors qu'on ne connaît pas d'expressions fermées sur lesquelles on pourrait effectuer une méthode du col usuelle.

**Publication associée [P15]**



# Conclusion

## L'intérêt des approches de type Ma-Dasgupta

Dans ce mémoire, nous avons décrit en détail comment différents types de systèmes désordonnés pouvaient être étudiés par des procédures de renormalisation de type Ma-Dasgupta. L'intérêt de ces méthodes vient des propriétés spécifiques suivantes.

- **Leur domaine de validité :**

Elles permettent d'étudier les systèmes désordonnés dans lesquels les hétérogénéités spatiales du désordre dominant à grande échelle par rapport aux fluctuations thermiques ou quantiques. Pour les systèmes gouvernés par un point fixe de désordre infini, elles donnent des résultats exacts. Pour les systèmes gouvernés par un point fixe de désordre fini suffisamment fort, elles constituent l'ordre dominant d'un développement systématique par rapport à l'inverse du désordre.

- **Leur structure pour les règles de renormalisation :**

Contrairement aux méthodes usuelles de renormalisation qui traitent l'espace de manière homogène, les procédures de type Ma-Dasgupta sont inhomogènes dans l'espace pour mieux s'adapter aux réalisations locales du désordre : c'est une variable extrême de désordre qui est décimée de manière itérative et qui engendre un flot de renormalisation pour une distribution de probabilité. En dimension  $d = 1$ , cette structure particulière permet d'obtenir des solutions explicites pour de nombreux modèles. En revanche, en dimension supérieure  $d > 1$ , l'application des règles de renormalisation n'a pu être faite, du moins jusqu'à présent, que de manière numérique (cf Annexe).

- **Leur sens physique :**

Elles ont un sens physique très clair, car les règles de renormalisation opèrent dans l'espace réel et sont basées sur des arguments physiques simples. Ainsi, dans les modèles classiques dynamiques, la renormalisation est basée sur le temps nécessaire pour franchir une barrière de potentiel ou pour s'échapper d'un piège. Dans les modèles d'équilibre thermodynamique, comme les chaînes de spins classiques ou l'hétéropolymère à une interface, la renormalisation peut se voir comme un prolongement des arguments de type Imry-Ma sur l'énergie aléatoire que le système est susceptible de gagner dans un domaine. Enfin, dans les modèles quantiques, la renormalisation permet de construire des amas de spins fortement corrélés.



- **Leur résultats :**

Pour tous les modèles où ces méthodes peuvent être appliquées, elles donnent une description très complète des phénomènes. En effet, comme la procédure de renormalisation est effectuée échantillon par échantillon, il est possible d'étudier par une même analyse de très nombreuses observables. Souvent, elles donnent même accès aux distributions de probabilité des observables par rapport à l'ensemble des échantillons, ce qui permet de bien comprendre l'influence des événements rares sur certaines quantités physiques.

- **Leur efficacité :**

Si elles fournissent des résultats qu'on ne peut pas obtenir par d'autres méthodes, c'est finalement parce qu'elles reposent sur deux piliers très différents, qui ne cohabitent généralement pas à l'intérieur d'une même approche, à savoir des arguments physiques heuristiques d'une part et des calculs exacts de renormalisation d'autre part. L'idée qualitative fructueuse des approches de type Ma-Dasgupta est d'intégrer ces deux aspects de manière claire et cohérente : (i) elles utilisent des arguments physiques simples pour identifier les degrés de liberté importants à grande échelle, et pour définir une renormalisation directement sur ces degrés de liberté (ii) elles étudient ensuite exactement le flot de cette renormalisation.

## Probabilités et renormalisation

Pour conclure par une réflexion plus générale, la renormalisation est un langage naturel pour l'étude des probabilités. En effet, de même que certains font de la prose sans le savoir, la théorie des probabilités a fait de la 'renormalisation' bien avant que les physiciens n'introduisent ce mot, avec le théorème de la Limite Centrale, les notions de lois stables et de bassins d'attraction.

Dans le cadre des systèmes désordonnés, les questions probabilistes sous-jacentes relèvent de la statistique des extrêmes [64, 24] : l'équilibre à basse température est gouverné par la statistique des états de basse énergie [56, 64, 24, 38, 54], alors que la dynamique à grand temps est gouvernée par la statistique des grandes barrières [71, 67, 7, 166].

De ce point de vue, les approches de type Ma-Dasgupta donnent un nouvel éclairage en proposant de manière générale de renormaliser des distributions de probabilité par décimation locale d'une variable aléatoire extrême. En particulier, pour le cas des potentiels aléatoires unidimensionnels, elles proposent de calculer par renormalisation la distribution de probabilité jointe des positions des extrema et des barrières qui les séparent. Parmi les solutions explicites que nous avons décrites, la classe d'universalité la plus importante est la classe d'universalité des extrema Browniens, qui permet de comprendre de manière unifiée l'équilibre ou la dynamique de différents types de systèmes désordonnés.

# Annexe : Autres modèles étudiés dans la littérature

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction (Page 4), les renormalisations de type Ma-Dasgupta ont été très utilisées pour les systèmes quantiques depuis les travaux de Daniel Fisher en 1994-1995 [75, 76]. Le but de cette Annexe est de mentionner très brièvement les diverses directions qui ont été suivies dans la littérature. (Des discussions générales sur la physique des systèmes quantiques gouvernés par des points fixes de désordre infini se trouvent dans les références [78, 95]).

## Diverses chaînes de spins quantiques

La renormalisation de Ma-Dasgupta pour la chaîne antiferromagnétique  $S = 1/2$  isotrope a été généralisée dans les directions suivantes :

- en présence d'anisotropie [76]
- en présence de dimérisation [97]
- pour des spins plus élevés, en particulier  $S = 1$  (cf Chapitre 10) et  $S = 3/2$  [149].

La référence [52] contient une discussion du diagramme de phases des chaînes antiferromagnétiques en fonction des divers paramètres anisotropie/spin/désordre. La renormalisation a été aussi utilisée pour caractériser les propriétés de transport de ces chaînes [50].

Parmi les autres types de chaînes de spins étudiées, on peut citer

- la chaîne avec couplages et champ aléatoires [75] (cf Chapitre 11).
- la chaîne de Potts et la chaîne 'clock' à  $q$  états en champs aléatoires [155]
- le modèle Ashkin-Teller [36]
- les échelles de spins [132].

Mentionnons enfin pour terminer une étude récente sur un modèle de bosons [5]. Cette liste non-exhaustive montre déjà les nombreuses possibilités d'étude pour les modèles quantiques unidimensionnels.

## Modèles quantiques en dimension supérieure $d > 1$

Pour les modèles quantiques antiferromagnétiques, la procédure de renormalisation de Ma-Dasgupta a été étudiée numériquement depuis longtemps en dimension supérieure [19]. L'étude récente [121] fait le point sur les points fixes obtenus en dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$  pour le modèle antiferromagnétique sur réseau hypercubique, ainsi que pour différentes variantes qui présentent de la dimérisation ou de la frustration.

Pour le modèle d'Ising avec couplages et champs magnétiques aléatoires (discuté en dimension  $d = 1$  dans le Chapitre 11), la renormalisation de type Ma-Dasgupta a été étudié numériquement en dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$  [138, 78]. Le résultat essentiel est que la transition de phase quantique à température nulle est encore gouvernée par des points fixes de désordre infini en  $d = 2$  et  $d = 3$ .

Y a-t-il un espoir de calculer un jour exactement les exposants critiques en  $d = 2$ ? D'un côté, la procédure de renormalisation de type Ma-Dasgupta détruit complètement le réseau régulier initial qui devient un réseau aléatoire, et introduit de plus des corrélations dans les variables de désordre, ce qui complique beaucoup l'analyse. D'un autre côté, la renormalisation de type Ma-Dasgupta transforme le problème de la transition de phase quantique en un problème de percolation de certains amas bidimensionnels [138]. Le calcul exact des exposants critiques en  $d = 2$  sera donc peut-être possible un jour ?

## Modèles classiques étudiés dans la littérature

Dans le cadre de la physique statistique classique, en dehors des modèles discutés dans le présent mémoire, les autres approches récentes de type Ma-Dasgupta concernent les problèmes suivants :

- la percolation 2D avec désordre constant par colonne [102]
- le modèle de Potts 2D dans la limite  $q \rightarrow \infty$  [103]
- la transition de phase vers un état absorbant en présence de désordre [104]
- un modèle d'exclusion en présence de désordre [105].

# Bibliographie

- [1] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, Phys. Rev. Lett. 59, 799 (1987)  
“Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets”.
- [2] A. Aharony, Y. Imry and S.-K. Ma Phys. Rev. Lett. 37, 1364 (1976)  
“Lowering of Dimensionality in Phase Transitions with Random Fields”.
- [3] A. Aharony, A.B. Harris and S. Wiseman, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 252  
“Critical Disordered Systems with Constraints and the Inequality  $\nu > 2/d$ ”.
- [4] S. Alexander, J. Bernasconi, W. Schneider and R. Orbach Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 175  
“Excitation dynamics in random one-dimensional systems”.
- [5] E. Altman, Y. Kafri, A. Polkovnikov and G. Refael, cond-mat/0402177  
“Phase transition of one dimensional bosons with strong disorder”.
- [6] C. Aslangul, M. Barthelemy, N. Pottier and D. Saint-James, J. Stat. Phys. 59, 11 (1990)  
“Dynamical exponents for one-dimensional random-random directed walks”.
- [7] L. Balents, J.P. Bouchaud and M. Mézard, J. Phys. I France 6 (1996) 1007  
“The large scale energy landscape of randomly pinned objects”.
- [8] L. Balents and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **56**, 12970 (1997)  
“Delocalization transition via supersymmetry in one dimension”.
- [9] J.R. Banavar and A.J. Bray, Phys. Rev B 35 (1987) 8888  
“Chaos in spin glasses : A renormalization-group study”.
- [10] A. Barrat, Phys. Rev. E 57, 3629 (1998)  
“Monte Carlo simulations of the violation of the fluctuation-dissipation theorem in domain growth processes”.
- [11] A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto and M. Sellitto, Phys. Rev. Lett. **85** 5034 (2000)  
“Edwards Measures for Powders and Glasses” ;  
A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto and M. Sellitto, Phys. Rev. E **63** 51301 (2001)  
“Edwards measures : A thermodynamic construction for dense granular media and glasses”.
- [12] G. Ben Arous, J. Cerny, T. Mountford, préprint  
“Aging for Bouchaud’s model in dimension two” ;  
J. Cerny, PhD thesis.

- [13] G. Ben-Arous, ICM, Beijing 2002, vol. 3, 3–14, math.PR/0304364  
“Aging and spin-glass dynamics”.
- [14] G. Ben-Arous, A. Bovier and V. Gayrard, Phys. Rev. Lett. 88 , 087201 (2002)  
“Aging in the random energy model”.
- [15] K. Bernardet, F. Pazmandi and G. Batrouni, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 4477  
“Disorder Averaging and Finite-Size Scaling”.
- [16] L. Berthier, J.L. Barrat and J. Kurchan, Eur. Phys. J. B 11, 635 (1999)  
“Response function of coarsening systems”.
- [17] E.M. Bertin and J.P. Bouchaud, Phys. Rev. E 67, 026128 (2003)  
“Sub-diffusion and localization in the one dimensional trap model ”.
- [18] E.M. Bertin and J.P. Bouchaud, Phys. Rev. E 67, 065105(R) (2003)  
“Linear and non linear response in the aging regime of the one-dimensional trap model”.
- [19] R. N. Bhatt and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. 48, 344 (1982)  
“Scaling Studies of Highly Disordered Spin-1/2 Antiferromagnetic Systems”.
- [20] G. Biroli and J. Kurchan, Phys. Rev. E 64, 016101 (2001)  
“Metastable states in glassy systems”.
- [21] J.P. Bouchaud, A. Georges and P. Le Doussal, J. Physique 48, 1855 (1987)  
“Diffusion anormale dans les milieux désordonnés : piégeage, corrélations et théorèmes de la limite centrale”.
- [22] J.P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Reports 195 (1990) 127  
“Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications” ;  
J.P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges and P. Le Doussal, Ann. Phys. 201, 285 (1990)  
“Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field”.
- [23] J.P. Bouchaud, J. Phys. I (France) 2 (1992) 1705  
“Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems” ;  
J.P. Bouchaud and D. Dean, J. Phys. I (France) 5 (1995) 265  
“Aging on Parisi’s tree ”.
- [24] J.-P. Bouchaud and M. Mézard, J. Phys. A 30 (1997) 7997  
“Universality classes for extreme-value statistics ”.
- [25] J.P. Bouchaud, L.F. Cugliandolo, J. Kurchan and M. Mézard, in “Spin glasses and random fields” A. P. Young Ed., World Scientific (1997)  
“Out of equilibrium dynamics in spin-glasses and other glassy systems”.
- [26] A. J. Bray and S. Feng Phys. Rev. B 36, 8456 (1987)  
“ Percolation of order in frustrated systems : The dilute J spin glass”.
- [27] A.J. Bray and M. A. Moore, J. Phys. C 17 (1984) L463  
“Lower critical dimension of Ising spin glasses : a numerical study”.
- [28] A.J. Bray and M. A. Moore, “Scaling theory of the ordered phase of spin glasses”  
in Heidelberg Colloquium on glassy dynamics, (1986) Springer Verlag.

- [29] A.J. Bray and M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. (1987) 57  
“Chaotic Nature of the Spin-Glass Phase”.
- [30] A.J. Bray, Phys. Rev. Lett. 59, 586 (1987)  
“Nature of the Griffiths phase” ;  
A.J. Bray, Phys. Rev. Lett. 60, 720 (1988)  
“Dynamics of dilute magnets above  $T_c$ ”.
- [31] A.J. Bray, B. Derrida and C. Godrèche, Europhys. Lett. 27, 175 (1994)  
“Nontrivial algebraic decay in a soluble model of coarsening”.
- [32] A.J. Bray and B. Derrida Phys. Rev. E 51, R1633 (1995)  
“Exact exponent  $\lambda$  of the autocorrelation function for a soluble model of coarsening”.
- [33] J. Bricomont and A. Kupiainen, Phys. Rev. Lett. 59, 1829 (1987)  
“Lower critical dimension for the random-field Ising model”.
- [34] T.W. Burkhardt and J.M.J. van Leeuwen, Topics in Current Physics 30, Springer (1982)  
“Real Space renormalization”.
- [35] C. Calan, J.M. Luck, T. Nieuwenhuizen and D. Petritis, J. Phys. A 18 (1985) 501  
“On the distribution of a random variable occurring in 1D disordered systems”.
- [36] E. Carlon, P. Lajkó, and F. Iglói Phys. Rev. Lett. 87, 277201 (2001) “Disorder Induced Cross-Over Effects at Quantum Critical Points”.
- [37] D. Carpentier and P. Le Doussal Phys. Rev. Lett. 81, 2558 (1998)  
“Disordered XY Models and Coulomb Gases : Renormalization via Traveling Waves”.
- [38] D. Carpentier and P. Le Doussal Phys. Rev. E 63, 026110 (2001)  
“Glass transition of a particle in a random potential, front selection in nonlinear renormalization group, and entropic phenomena in Liouville and sinh-Gordon models”.
- [39] H. E. Castillo and P. Le Doussal Phys. Rev. Lett. 86, 4859 (2001)  
“Freezing of Dynamical Exponents in Low Dimensional Random Media”.
- [40] J. Chave and E. Guitter J. Phys. A 32 (1999) 445  
“Statistical and dynamical properties of the discrete Sinai model at finite times”.
- [41] J. T. Chayes, L. Chayes, D.S. Fisher and T. Spencer Phys. Rev. Lett. 57, 2999 (1986)  
“Finite-Size Scaling and Correlation Lengths for Disordered Systems”.
- [42] D. Cheliotis, math.PR/0310306  
“Diffusion in random environment and the renewal theorem”.
- [43] A. Compte and J.P. Bouchaud, J. Phys. A 31 (1998) 6113  
“Localization in one-dimensional random random walks”.
- [44] J. Cook, B. Derrida, J. Stat. Phys. 57, 89 (1989)  
“Polymers on disordered hierarchical lattices : a non-linear combination of random variables”

- [45] A. Crisanti and F. Ritort J. Phys. A 36 ( 2003) R181  
“ Violation of the fluctuation-dissipation theorem in glassy systems : basic notions and the numerical evidence ”
- [46] A. Crisanti, G. Paladin, A. Vulpiani, “Products of random matrices in statistical physics”, Springer Verlag (1993).
- [47] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan Phys. Rev. Lett. 71, 173 (1993)  
“ Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin-glass model” ;  
L. F. Cugliandolo and J. Kurchan J. Phys. A : Math. Gen. 27 (1994) 5749  
“On the out-of-equilibrium relaxation of the Sherrington-Kirkpatrick model”.
- [48] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan and L. Peliti, Phys. Rev. E 55 (1997) 3898  
“Energy flow, partial equilibration, and effective temperatures in systems with slow dynamics ”.
- [49] L. F. Cugliandolo, “Dynamics of glassy systems”, Lecture notes in “Slow Relaxation and non equilibrium dynamics in condensed matter”, Les Houches 2002.
- [50] K. Damle, O. Motrunich, D.A. Huse, Phys. Rev. Lett. 84, 3434 (2000)  
“ Dynamics and Transport in Random Antiferromagnetic Spin Chains” ; O. Motrunich, K. Damle, and D. A. Huse Phys. Rev. B 63, 134424 (2001)  
“Dynamics and transport in random quantum systems governed by strong-randomness fixed points”.
- [51] K. Damle, Phys. Rev. B 66, 104425 (2002)  
“Griffiths effects in random Heisenberg antiferromagnetic  $S=1$  chains”.
- [52] K. Damle and D. A. Huse Phys. Rev. Lett. 89, 277203 (2002)  
“ Permutation-Symmetric Multicritical Points in Random Antiferromagnetic Spin Chains”.
- [53] R.A. Da Silva and J.P. Bouchaud, cond-mat/0310706  
“Temperature and disorder chaos in low dimensional directed paths”.
- [54] D. S. Dean and S. N. Majumdar, Phys. Rev. E 64, 046121 (2001)  
“Extreme-value statistics of hierarchically correlated variables deviation from Gumbel statistics and anomalous persistence”.  
S. N. Majumdar, P.L. Krapivsky, Physica A 318, 161 (2003)  
“Extreme Value Statistics and Traveling Fronts : Various Applications”.
- [55] A. Dembo, A. Guionnet and O. Zeitouni, math.PR/0105215  
“ Aging properties of Sinai’s model of random walk in random environment” in Lectures Notes of O. Zeitouni for the Saint Flour Summer School 2001, to appear in Lecture Notes in Mathematics, Springer (2004).
- [56] B. Derrida, Phys. Rev. Lett. 45, 79-82 (1980)  
“ Random energy model : limit of a family of disordered models” ;  
B. Derrida, Phys. Rev. B 24, 2613-2626 (1981)  
“The random energy model, an exactly solvable model of disordered systems” ;  
B. Derrida, G. Toulouse, J. Physique Lett. 46, L223-L228 (1985)

- “Sample to sample fluctuations in the random energy model” ;  
 E. Gardner, B. Derrida, J. Phys. A 22, 1975 (1989)  
 “The probability distribution of the partition function of the random energy model”.
- [57] B. Derrida, Y. Pomeau, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 627  
 “Classical diffusion on a random chain” ;  
 B. Derrida, J. Stat. Phys. 31 (1983) 433  
 “Velocity and diffusion constant of a periodic one-dimensional hopping model”.
- [58] B. Derrida and H.J. Hilhorst, J. Phys. A 16 (1983) 2641  
 “Singular behaviour of certain infinite products of random  $2 \times 2$  matrices”.
- [59] B. Derrida and E. Gardner J. Phys. A 17 (1984) 3223  
 “Renormalisation group study of a disordered model”.
- [60] B. Derrida and R.B. Griffiths, Europhys. Lett. 8, 111 (1989) “Directed polymers on disordered hierarchical lattices”.
- [61] B. Derrida, C. Godrèche and I. Yekutieli, Europhys. Lett. 12, L385 (1990)  
 “Stable distributions of growing and coalescing droplets” ;  
 B. Derrida, C. Godrèche and I. Yekutieli, Phys. Rev. A 44, 6241 (1991)  
 “Scale-invariant regime in the one-dimensional models of growing and coalescing droplets” ;  
 I. Yekutieli, C. Godrèche and B. Derrida, Physica A 185, 240 (1992)  
 “One-dimensional models of growing and coalescing droplets”.
- [62] B. Derrida, V. Hakim, J. Vannimenus, J. Stat. Phys. 66, 1189 (1992)  
 “Effect of disorder on two dimensional wetting”.
- [63] B. Derrida and R. Zeitak, Phys. Rev. E 54, 2513 (1996)  
 “Distribution of domain sizes in the zero temperature Glauber dynamics of the 1d Potts model”.
- [64] B. Derrida, Physica D 107, 186 (1997) “From random walks to spin-glasses”.
- [65] G. De Smedt, C. Godrèche and J.M. Luck, Eur. Phys. J. B 27, 363 (2002)  
 “Jamming, freezing and metastability in one-dimensional spin systems” ;  
 G. De Smedt, C. Godrèche and J.M. Luck, Eur. Phys. J. B 32, 215-225 (2003)  
 “Metastable states of Ising chain with Kawasaki dynamics”.
- [66] A. Dhar and A.P. Young, Phys. Rev. B 68, 134441 (2003)  
 “Ensemble dependence in the random transverse-field Ising chain”.
- [67] B. Drossel and M. Kardar Phys. Rev. E 52, 4841-4852 (1995)  
 “Scaling of energy barriers for flux lines and other random systems” ;  
 L. V. Mikheev, B. Drossel, and M. Kardar Phys. Rev. Lett. 75, 1170-1173 (1995)  
 “Energy Barriers to Motion of Flux Lines in Random Media”.
- [68] F. Dyson, Phys. Rev. 92, 1331 (1953)  
 “The Dynamics of a Disordered Linear Chain”.
- [69] K.B. Efetov, “Supersymmetry in Disorder and chaos”, Cambridge University Press (1997).



- [70] A. Engel, Nucl. Phys. B 410, 617 (1993)  
“Replica Symmetry breaking in zero dimension”.
- [71] M.V. Feigelman and V.M. Vinokur, J. Phys. (France) 49 (1988) 1731  
“On the stochastic transport in disordered systems”.
- [72] S. Fielding and P. Sollich Phys. Rev. Lett. 88, 050603 (2002)  
“Observable Dependence of Fluctuation-Dissipation Relations and Effective Temperatures ” ;  
P. Sollich, J. Phys. A 36, 10807 (2003)  
“Fluctuation-dissipation relations in trap models” ;  
F. Ritort, J. Phys. A 36, 10791 (2003)  
“ Universal dependence of the fluctuation-dissipation ratio on the transition rates in trap models”.
- [73] D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. 56, 1964 (1986)  
“ Interface Fluctuations in Disordered Systems : 5- epsilon Expansion and Failure of Dimensional Reduction”.
- [74] D.S. Fisher and D.A. Huse, Phys. Rev. Lett. 56, 1601 (1986)  
“Ordered Phase of Short-Range Ising Spin-Glasses” ;  
D. S. Fisher and D. A. Huse, Phys. Rev. B 38, 386 (1988)  
“Equilibrium behavior of the spin-glass ordered phase” ;  
D. S. Fisher and D. A. Huse, Phys. Rev. B 38, 373 (1988)  
“Nonequilibrium dynamics of spin glasses”.
- [75] D. S. Fisher Phys. Rev. Lett. 69, 534-537 (1992)  
“Random transverse field Ising spin chains” ;  
D. S. Fisher Phys. Rev. B 51, 6411-6461 (1995)  
“Critical behavior of random transverse-field Ising spin chains”.
- [76] D. S. Fisher Phys. Rev. B 50, 3799 (1994)  
“Random antiferromagnetic quantum spin chains”.
- [77] D.S. Fisher and A. P. Young, Phys. Rev. B 58, 9131 (1998)  
“Distributions of gaps and end-to-end correlations in random transverse-field Ising spin chains”.
- [78] D.S. Fisher, Physica A 263 (1999) 222  
“Phase transitions and singularities in random quantum systems”.
- [79] L.R. Fontes, M. Isopi and C. Newman, math.PR/0009098  
“Random walks with strongly inhomogeneous rates and singular diffusions : Convergence, localization and aging in one dimension” ;  
G. Ben Arous and J. Cerny, math.PR/0210633  
“Bouchaud’s model exhibits two arising regimes in dimension one”.
- [80] L. Frachebourg and P. A. Martin, J. Fluid. Mech. 417, 323 (2000)  
“Exact statistical properties of the Burgers equation”.
- [81] T. Garel, D. Huse, S. Leibler et H. Orland, Europhys. Lett. 8, 9 (1989)  
“Localization transition of random chains at interfaces”.

- [82] C. Godrèche and J.M. Luck, J. Phys. A 33, 1151 (2000)  
“Response of non-equilibrium systems at criticality : Exact results for the Glauber-Ising chain”.
- [83] C. Godrèche and J.M. Luck, J. Phys. A 33, 9141 (2000)  
“Response of non-equilibrium systems at criticality : Ferromagnetic models in dimension two and above”.
- [84] A.O. Golosov, Sov. Math. Dokl. 28 (1983) 18  
“Limiting distributions for random walks in random environments”.
- [85] A.O. Golosov, Comm. Math. Phys. 92 (1984) 491  
“Localization of random walks in one-dimensional random environments”.
- [86] A.O. Golosov, Russ. Math. Surv. 41 199  
“On limiting distributions for a random walk in a critical one-dimensional random environment”.
- [87] R. B. Griffiths, Phys. Rev. Lett. 23, 17 (1969)  
“Nonanalytic Behavior Above the Critical Point in a Random Ising Ferromagnet”.
- [88] P. Groeneboom, Prob. Theo. Rel. Fields 81 (1989) 79  
“Brownian motion with a parabolic drift and Airy functions”.
- [89] A. B. Harris, J. Phys. C 7 , 1671 ( 1974)  
“Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models”.
- [90] J.W. Haus et K.W. Kehr Phys. Rep. 150 (1987) 263  
“Diffusion in regular and disordered lattices”.
- [91] S. Havlin and D. Ben Avraham, Adv. Phys. 36 (1987) 695  
“Diffusion in disordered media” ;  
D. Ben-Avraham and S. Havlin, Cambridge University Press (2000)  
“Diffusion and reactions in fractals and disordered systems”
- [92] J. E. Hirsch and J. V. Jose J. Phys. C 13 ( 1980) L53  
“Low-temperature thermodynamic properties of a random Heisenberg antiferromagnetic chain ( $S=1/2$ )” ;  
J. E. Hirsch and J. V. José Phys. Rev. B 22, 5339 (1980)  
“Singular thermodynamic properties in random magnetic chains” ;  
J.E. Hirsch Phys. Rev. B 22, 5355 (1980)  
“Low-temperature thermodynamic properties of a random anisotropic antiferromagnetic chain”.
- [93] Y. Hu, Z. Shi and M. Yor, Trans. Am. Math. Soc. 351 3915 (1999)  
“Rates of convergence of diffusions with drifted Brownian potentials ”
- [94] Y. Hu, Stoch. Proc. and Appl. 86 (2000) 81  
“Tightness of localization and return time in random environment ”.
- [95] D.A. Huse, Phys. Rep. 348 (2001) 159  
“Renormalizing systems with strong quenched randomness”.
- [96] T. Hwa, E. Marinari, K. Sneppen and L.H. Tang, cond-mat/0302603  
“Localization of Denaturation Bubbles in Random DNA Sequences”.

- [97] R. A. Hyman, K. Yang, R. N. Bhatt, and S. M. Girvin Phys. Rev. Lett. 76, 839 (1996)  
“Random Bonds and Topological Stability in Gapped Quantum Spin Chains”.
- [98] R. A. Hyman and K. Yang, Phys. Rev. Lett. 78, 1783 (1997)  
“Impurity Driven Phase Transition in the Antiferromagnetic Spin-1 Chain”.
- [99] F. Igloi and H. Rieger. Phys. Rev. B **57** (1998) 11404  
“Random transverse Ising spin chain and random walks”.
- [100] F. Igloi, R. Juhász, and P. Lajkó Phys. Rev. Lett. 86, 1343 (2001)  
“Griffiths-McCoy Singularities in Random Quantum Spin Chains : Exact Results through Renormalization”.
- [101] F. Igloi Phys. Rev. B 65, 064416 (2002)  
“Exact renormalization of the random transverse-field Ising spin chain in the strongly ordered and strongly disordered Griffiths phases”.
- [102] R. Juhász and F. Igloi Phys. Rev. E 66, 056113 (2002)  
“Percolation in a random environment”
- [103] J-Ch. Anglès d’Auriac and F. Igloi Phys. Rev. Lett. 90, 190601 (2003)  
“Phase Transition in the 2D Random Potts Model in the Large-q Limit” ;  
M. T. Mercaldo, J-Ch. Anglès d’Auriac, and F. Igloi Phys. Rev. E 69, 056112 (2004)  
“Disorder-induced rounding of the phase transition in the large- q -state Potts model”
- [104] J. Hooyberghs, F. Igloi, and C. Vanderzande Phys. Rev. Lett. 90, 100601 (2003)  
“Strong Disorder Fixed Point in Absorbing-State Phase Transitions” ;  
J. Hooyberghs, F. Igloi, and C. Vanderzande, cond-mat/0402086  
“Absorbing state phase transitions with quenched disorder”.
- [105] R. Juhász, L. Santen and F. Igloi, cond-mat/0404575  
“Partially asymmetric exclusion models with quenched disorder”.
- [106] J.Z. Imbrie, Phys. Rev. Lett. 53, 1747 (1984 “Lower Critical Dimension of the Random-Field Ising Model”.
- [107] Y. Imry and S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. 35, 1399 (1975)  
“Random-Field Instability of the Ordered State of Continuous Symmetry”.
- [108] Y. Imry, J. Stat. Phys. **34** 849 (1984)  
“Random external fields”.
- [109] C. Jayaprakash, E. K. Riedel and M. Wortis, Phys. Rev. B 18, 2244 (1978)  
“Critical and thermodynamic properties of the randomly dilute Ising model”.
- [110] I. Junier and J. Kurchan, cond-mat/0311158  
“Microscopic realizations of the trap model”.
- [111] L.P. Kadanoff, Ann. Phys. 100 (1976) 743  
“Notes on Migdal’s recursion formulas”.

- [112] M. Kaufman and R. B. Griffiths, Phys. Rev. B 24, 496(1981)  
 “ Exactly soluble Ising models on hierarchical lattices” ;  
 R. B. Griffiths and M. Kaufman, Phys. Rev. B 26, 5022(1982)  
 “ Spin systems on hierarchical lattices : Introduction and thermodynamic limit”.
- [113] H. Kesten, Acta Math. **131** (1973) 207  
 “Random difference equations and renewal theory for products of random matrices”.
- [114] H. Kesten, M. Koslov and F. Spitzer, Compositio Math. 30 (1975) 145  
 “A limit law for random walk in a random environment”.
- [115] H. Kesten, Physica 138 A (1986) 299  
 “The limit distribution of Sinai’s random walk in random environment”.
- [116] W. Kinzel and E. Domany Phys. Rev. B 23, 3421 (1981)  
 “Critical properties of random Potts models”.
- [117] J. Kurchan, cond-mat/0209399  
 “Supersymmetry, replica and dynamic treatments of disordered systems : a parallel presentation”.
- [118] P. Le Doussal and K. J. Wiese, Phys. Rev. Lett. 89, 125702 (2002)  
 “Functional Renormalization Group at Large N for Disordered Systems”.
- [119] I.M. Lifshitz, Adv. Phys. 13 (1964) 483  
 “The energy spectrum of disordered systems ” ;  
 I.M. Lifshitz, Sov. Phys. Usp. 7 (1965) 549  
 “Energy spectrum and quantum states of disordered condensed systems”.
- [120] I.M. Lifshitz, S.A. Gredeskul and L.A. Pastur, John Wiley and Sons (1987)  
 “Introduction to the theory of disordered systems”.
- [121] Y.-C. Lin, R. Mélin, H. Rieger, and F. Igloi Phys. Rev. B 68, 024424 (2003)  
 “Low-energy fixed points of random Heisenberg models”.
- [122] D. K. Lubensky and D. R. Nelson Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 1572  
 “Pulling Pinned Polymers and Unzipping DNA” ;  
 D. K. Lubensky and D. R. Nelson Phys. Rev. E 65, 031917 (2002)  
 “Single molecule statistics and the polynucleotide unzipping transition” ;  
 D. R. Nelson, cond-mat/0309559  
 “Statistical Physics of Unzipping DNA” ;  
 Y. Kafri, D. K. Lubensky, D. R. Nelson, cond-mat/0310455  
 “Dynamics of Molecular Motors and Polymer Translocation with Sequence Heterogeneity”.
- [123] J.M. Luck, Aléa Saclay (1992),  
 “Systèmes désordonnés unidimensionnels”.
- [124] J. Machta, J. Phys. A 18 (1985) L531  
 “Random walks on site disordered lattices”.
- [125] S.-K. Ma, C. Dasgupta, and C.-k. Hu, Phys. Rev. Lett. 43, 1434 (1979)  
 “Random Antiferromagnetic Chain” ;

- C. Dasgupta and S.-K. Ma Phys. Rev. B 22, 1305 (1980)  
 “Low-temperature properties of the random Heisenberg antiferromagnetic chain”.
- [126] S. N. Majumdar and A. J. Bray, Phys. Rev. Lett. 81, 2626 (1998)  
 “Persistence with Partial Survival”.
- [127] S. N. Majumdar and A. Comtet, Phys. Rev. Lett. 89, 060601 (2002) “Local and Occupation Time of a Particle Diffusing in a Random Medium”.
- [128] S. N. Majumdar and A. Comtet Phys. Rev. E 66, 061105 (2002) “Exact asymptotic results for persistence in the Sinai model with arbitrary drift”
- [129] W.L. Mc Millan, J. Phys. C 17 (1984) 3179  
 “Scaling theory of Ising spin glasses”
- [130] B. M. McCoy and T. T. Wu Phys. Rev. 176, 631 (1968)  
 “Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities I : Thermodynamics” ;  
 B. M. McCoy and T. T. Wu Phys. Rev. 188, 982 (1969)  
 “Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities II : Spin Correlation Functions” ;  
 B. M. McCoy Phys. Rev. 188, 1014 (1969)  
 “Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities III : Boundary Effects” ;  
 B. M. McCoy Phys. Rev. B 2, 2795 (1970)  
 “Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities IV : Generalizations”.
- [131] S.R. McKay, A.N. Berker and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 767  
 “ Spin-Glass Behavior in Frustrated Ising Models with Chaotic Renormalization-Group Trajectories”.
- [132] R. Mélin, Y.-C. Lin, P. Lajkó, H. Rieger, and F. Iglói Phys. Rev. B 65, 104415 (2002)  
 “Strongly disordered spin ladders”.
- [133] M. Mézard, G. Parisi and M.A. Virasoro, World Scientific (1987),  
 “Spin glass theory and beyond”.
- [134] M. Mézard and G. Parisi, J. Phys. I 2, 2231 (1992)  
 “Manifolds in random media : two extreme cases”.
- [135] A.A. Migdal, Sov Phys. JETP 42 (1976) 743  
 “Phase transitions in gauge and spin-lattice systems”.
- [136] C. Monthus and A. Comtet, J. Phys. I (France) 4 (1994) 635  
 “On the flux distribution in a one dimensional disordered system”.
- [137] M. A. Moore, H. Bokil, B. Drossel Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 4252  
 “ Evidence for the droplet/scaling picture of spin glasses” ;  
 H. Bokil, B. Drossel, and M. Moore, Phys. Rev. B 62, 946 (2000)  
 “ The influence of critical behavior on the spin glass phase” ;  
 B. Drossel, H. Bokil, M.A. Moore, A.J. Bray, Eur. Phys. J. B 13, 369 (2000)

- “Link Overlap and Finite Size Effects in the 3D Ising Spin Glass” ;  
 B. Drossel and M.A. Moore, Eur. Phys. J. B 21, 589 (2001)  
 “The  $\pm J$  Ising spin glass in Migdal-Kadanoff approximation” ;  
 T. Aspelmeier, A. J. Bray, M. A. Moore Phys. Rev. Lett. 89, 197202 (2002)  
 “Why temperature chaos in spin glasses is hard to observe”.
- [138] O. Motrunich, S.-C. Mau, D. A. Huse, and D. S. Fisher Phys. Rev. B 61, 1160 (2000)  
 “Infinite-randomness quantum Ising critical fixed points”.
- [139] O. Motrunich, K. Damle and D.A. Huse, Phys. Rev. B **63** 134424 (2001)  
 “Dynamics and transport in random quantum systems governed by strong-randomness fixed points”.
- [140] T. Nagai and K. Kawasaki, Physica A 134, 483 (1986)  
 “Statistical dynamics of interacting kinks”.
- [141] Th. Niemeijer and J.M. J. van Leeuwen, in “Phase transitions and critical phenomena”, Ed. Domb and Green (1976)  
 “Renormalization theories for Ising spin systems”.
- [142] Th. M. Nieuwenhuizen, Phys. Rev. Lett. 63, 1760 (1989)  
 “Griffiths singularities in two-dimensional random-bond Ising models : Relation with Lifshitz band tails”.
- [143] Th. M. Nieuwenhuizen and H. Orland, Phys. Rev. B 40, 5094 (1989)  
 “Thermodynamics of Ising models with layered randomness : exact solutions on square and triangular lattices”.
- [144] M. Nifle and H.J. Hilhorst, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 2992  
 “New critical-point exponent and new scaling laws for short-range Ising spin glasses” ;  
 M. Ney-Nifle and H.J. Hilhorst, Physica A 193 (1993) 48  
 “Chaos exponents in spin-glasses” ;  
 M. Ney-Nifle and H.J. Hilhorst, Physica A 194 (1993) 462  
 “Renormalization theory and chaos exponents in random systems”.
- [145] M. den Nijs and K. Rommelse, Phys. Rev. B 40, 4709 (1989) “Preroughening transitions in crystal surfaces and valence-bond phases in quantum spin chains”.
- [146] G. Parisi and N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. 43, 744 (1979)  
 “Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions”.
- [147] F. Pazmandi, R. Scalettar and G. Zimanyi, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 5130  
 “Revisiting the Theory of Finite Size Scaling in Disordered Systems :  $\nu$  can be less than  $2/d$ ”.
- [148] M. Randeria, J. P. Sethna and R. G. Palmer Phys. Rev. Lett. 54, 1321 (1985)  
 “Low-Frequency Relaxation in Ising Spin-Glasses”.
- [149] G. Refael, S. Kehrein and D. S. Fisher Phys. Rev. B 66, 060402 (2002)  
 “Spin reduction transition in spin-3/2 random Heisenberg chains”.

- [150] G. Refael, and D. S. Fisher, cond-mat/0308176  
“Energy correlations in random transverse field Ising spin chains”.
- [151] A. D. Rutenberg and A. J. Bray, Phys. Rev. E 50, 1900 (1994)  
“Phase-ordering kinetics of one-dimensional nonconserved scalar systems”.
- [152] M. Sasaki and O. C. Martin, Phys. Rev. Lett. 91, 97201 (2003)  
“Temperature chaos, rejuvenation and memory in Migdal-Kadanoff spin glasses”.
- [153] H. Schmidt, Phys. Rev. 105, 425 (1957)  
“Disordered One-Dimensional Crystals”.
- [154] U. Schulz, J. Villain, E. Brézin et H. Orland, J. Stat. Phys. 51, 1 (1988)  
“Thermal fluctuations in some random field models”.
- [155] T. Senthil and S. N. Majumdar Phys. Rev. Lett. 76, 3001 (1996) “Critical Properties of Random Quantum Potts and Clock Models”.
- [156] Y.A.G. Sinai, Theor. Prob. Appl. 27 (1982) 256  
“The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium”.
- [157] R. Shankar and G. Murthy Phys. Rev. B 36, 536 (1987)  
“Nearest-neighbor frustrated random-bond model in  $d=2$  : Some exact results”.
- [158] F. Solomon, Ann. Prob. 3 (1975) 1  
“Random walks in random environment”.
- [159] D. Stauffer, Taylor and Francis, London and Philadelphia, (1985)  
“Introduction to percolation theory”.
- [160] S. Tanase-Nicola and J. Kurchan, cond-mat/0311273  
“Metastable states, transitions, bassins and borders at finite temperatures”.
- [161] L.-H. Tang and H. Chaté Phys. Rev. Lett. 86, 830 (2001)  
“Rare-Event Induced Binding Transition of Heteropolymers”.
- [162] M.J. Thill and H.J. Hilhorst, J. Phys. I 6 (1996) 67  
“Theory of the critical state of low-dimensional spin-glass”.
- [163] J. Villain, B. Séméria, F. Lançon and L. Billard, J. Phys. C 16, 6153 (1983)  
“A controversial problem : modified Ising model in a random field”.
- [164] J. Villain, J. Phys. A 21 L1099 (1988)  
“Failure of perturbation theory in random field models”.
- [165] J. Villain and B. Séméria, J. Phys. Lett. 44 L889 (1983)  
“The danger of iteration methods”.
- [166] V. Vinokur, C. Marchetti and L. Chen, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1845, “Glassy Motion of Elastic Manifolds”.
- [167] K. J. Wiese, cond-mat/0302322  
“The Functional Renormalization Group Treatment of Disordered Systems : a Review”.
- [168] S. Wiseman and E. Domany, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 22  
“Finite-Size Scaling and Lack of Self-Averaging in Critical Disordered Systems” ;

- S. Wiseman and E. Domany Phys Rev E **58** (1998) 2938  
“Self-averaging, distribution of pseudocritical temperatures, and finite size scaling in critical disordered systems”.
- [169] A. P. Young and R. B. Stinchcombe, J. Phys. C 9 (1976) 4419  
“ Real-space renormalization group calculations for spin glasses and dilute magnets” ;  
B. W. Southern and A. P. Young J. Phys. C 10 ( 1977) 2179  
“ Real space rescaling study of spin glass behaviour in three dimensions ”
- [170] E. Yusuf and K. Yang Phys. Rev. B 68, 024425 (2003) “Random antiferromagnetic spin-1 / 2 chains with competing interactions”.
- [171] Zhan Shi, Panoramas et synthèses, 12 (2001) 53, Soc. Math. de France  
“ Sinai’s walk via stochastic calculus”.





# Liste des Publications associées

Ce mémoire est basé sur les publications suivantes, dans l'ordre chronologique :

- [P1] C. Monthus, O. Golinelli and Th. Jolicoeur, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 3254  
“Percolation transition in the random antiferromagnetic spin-1 chain”.
- [P2] C. Monthus, O. Golinelli and Th. Jolicoeur, Phys. Rev. B 58 (1998) 805  
“Phases of random antiferromagnetic spin-1 chains”.
- [P3] D. Fisher, P. Le Doussal and C. Monthus, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 3539  
“Random Walks, Reaction-Diffusion, and Nonequilibrium Dynamics of Spin Chains in One-dimensional Random Environments”.
- [P4] D. S. Fisher, P. Le Doussal and C. Monthus, Phys. Rev. E 59 (1999) 4795  
“Random Walkers in One-dimensional Random Environments : Exact Renormalization Group Analysis”,
- [P5] P. Le Doussal and C. Monthus, Phys. Rev. E 60 (1999) 1212  
“Reaction Diffusion models in one dimension with disorder”.
- [P6] C. Monthus, Eur. Phys. J. B 13 (2000) 111  
“On the localization of random heteropolymers at the interface between two selective solvents”.
- [P7] D. S. Fisher, P. Le Doussal and C. Monthus, Phys. Rev. E 64 (2001) 66107  
“Nonequilibrium Dynamics of Random Field Ising Spin Chains : exact results via real space RG”.
- [P8] C. Monthus and P. Le Doussal, Phys. Rev. E 65 (2002) 66129  
“Localization of thermal packets and metastable states in the Sinai model.”
- [P9] P. Le Doussal and C. Monthus, Physica A 317 (2003) 140  
“Exact solutions for the statistics of extrema of some random 1D landscapes, Application to the equilibrium and the dynamics of the toy model.”

- [P10] C. Monthus and P. Le Doussal, Physica A 334 (2004) 78  
“Energy dynamics in the Sinai model.”
- [P11] C. Monthus, Phys. Rev. E 67 (2003) 046109  
“Localization properties of the anomalous diffusion phase  
in the directed trap model and in the Sinai diffusion with bias.”
- [P12] C. Monthus, Phys. Rev. E 68 (2003) 036114  
“Anomalous diffusion, Localization, Aging and Sub-aging effects  
in trap models at very low temperature”.
- [P13] C. Monthus, J. Phys. A 36 (2003) 11605  
“On a non-linear Fluctuation Theorem for the aging dynamics  
of disordered trap models ”.
- [P14] C. Monthus, Phys. Rev. E 69, 026103 (2004)  
“Non-linear Response of the trap model in the aging regime :  
Exact results in the strong disorder limit”.
- [P15] C. Monthus, Phys. Rev. B 69, 054431 (2004)  
“Finite-size scaling properties of random transverse-field Ising chains :  
comparison between canonical and microcanonical ensembles for the disorder ”.

## Résumé

Les procédures de renormalisation dans l'espace réel de type Ma-Dasgupta permettent d'étudier des systèmes désordonnés gouvernés par des points fixes de fort désordre. Après une présentation générale des idées physiques importantes et des méthodes de calcul, ce mémoire décrit les résultats explicites exacts que ces procédures de renormalisation permettent d'obtenir dans différents modèles unidimensionnels, classiques ou quantiques, dynamiques ou statiques. La majeure partie du mémoire est consacrée à des modèles de physique statistique, avec notamment

- (i) la dynamique hors équilibre d'une particule dans un potentiel Brownien ou dans un paysage de pièges aléatoires,
- (ii) la dynamique de croissance de domaines et l'équilibre thermodynamique des chaînes de spins désordonnées classiques,
- (iii) la transition de délocalisation d'un polymère aléatoire à une interface.

La dernière partie du mémoire concerne deux chaînes de spins quantiques désordonnées qui présentent une transition de phase à température nulle en fonction du désordre, à savoir

- (a) la chaîne de spin  $S = 1$  antiferromagnétique aléatoire
- (b) la chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires.

## Abstract

The Ma-Dasgupta real-space renormalization methods allow to study disordered systems which are governed by strong disorder fixed points. After a general introduction to the qualitative ideas and to the quantitative renormalization rules, we describe the explicit exact results that can be obtained in various one-dimensional models, either classical or quantum, either for dynamics or statics. The main part of this dissertation is devoted to statistical physics models, with special attention to

- (i) the off-equilibrium dynamics of a particle diffusing in a Brownian potential or in a trap landscape,
- (ii) the coarsening dynamics and the equilibrium of classical disordered spin chains,
- (iii) the delocalization transition of a random polymer at an interface.

The last part of the dissertation deals with two disordered quantum spin chains which exhibit a zero-temperature phase transition as the disorder varies, namely

- (a) the random antiferromagnetic  $S = 1$  spin chain,
- (b) the random transverse field Ising chain.